غیر رسمی طریقہ تدریس

درسی کتاب

پیکیج ای (جماعت ہشتم)

ریاضی

نظامت برائے خواندگی و غیر رسمی تعلیم
نظامت برائے نصاب، جائزہ و تحقیق
شعبہ تعلیم و خواندگی، حکومتِ سندھ

غیر رسمی طریقہ تدریس سے

ریاضی

پیکیج- ای (برائے جماعت ہشتم)

نظامت برائے خواندگی و غیر رسمی تعلیم
نظامت برائے نصاب، جائزہ و تحقیق
شعبہ تعلیم و خواندگی، حکومتِ سندھ

یہ تدریسی مواد غیر رسمی بنیادی اسکولوں کے طلبہ و طالبات کی تعلیمی ضروریات کو مدنظرر کھتے ہوئے حکومت سندھ کے منظورشدہ نصاب ALP-Middle (Notification No. SELD/HCW/8/2018 Dated: 6 September, 2024)کے مطابق بنایا گیا ہے۔ اس سلسلے میں نظامت خواندگی و غیر رسمی تعلیم حکومت سندھ آپ کی آراء اور تجاویز کو مزید بہتری کے لئے استعمال کیا جائے گا۔

مصنّفین و مؤ لفین :

1. صغیر احمد شیخ
2. ڈاکٹر رضیہ فقیر

اراکینِ جائزہ کمیٹی

1. ظہیر حسین عباسی
2. احمد خان زئور
3. زوہیب حسیب

نگران اعلی: ڈائریکٹر (نظامت خواندگی و غیر رسمی تعلیم حکومت سندھ)

نگران طباعت: عابد گِل، مس چی ہو اوباشی (JICA-AQAL پروجیکٹ)

تکنیکی معاونت: محمد یونس (JICA-AQAL پروجیکٹ)

سہولت کار: پریم ساگر (JICA-AQAL پروجیکٹ)

لَے آؤٹ ڈیزائننگ: فرحان جاوید، محمد اکمل (JICA-AQAL پروجیکٹ)

تکنیکی و مالی معاونت: JICA-AQAL پروجیکٹ UNICEF سندھ

پیغام

خیر اندیش

سیکرٹری محکمہ تعلیم و

خواندگی

حکومتِ سندھ

پیش لفظ

خیر اندیش

ڈائریکٹر نظامت خواندگی و

غیر رسمی تعلیم

حکومتِ سندھ

فہرست عنوانات

یونٹ 1 سیٹ پر عمل

حصّہ اوّل: اعداد کے سیٹ

سرگرمی 1 (الف): **سیٹ ہماری زندگی میں- ریاضی سیکھیں**

چارٹ کو کلاس میں آویزاں کریں اور اس پر گفتگو کریں۔ (ٹیچر گائیڈ سرگرمی الف دیکھیں)

سرگرمی 1 (ب):(مکالمہ) اعداد کی اہمیت؛ اعداد کیوں اہم ہیں؟

اُستاد مکالمہ کے اصول واضح کر کے پہلے اہمیت کا نکتہ پڑھے اور بچے اس کی مثالیں دیں۔

چند مثالوں کے بعد استاد رہنمائی کریں۔

اُستاد:	**(بچوں کے جوابات، ممکنہ)**
وقت دیکھنا، معلوم کرنا	دِن رات میں کتنے گھنٹے، ٹائم دیکھنا، صبح کے کام کرنا، نہانا، ناشتہ، اسکول یا کام کی تیاری۔
	ہر مضمون کو اہمیت دینا، تیاری کرنا، وضو کرنا، وقت کی پابندی پر نماز ادا کرنا
روزمرہ کے خرچ کا حساب رکھنا۔ بازار میں خرید و فروخت کرنا۔ کوئی چیز بیچنا۔ اخبار، ٹی وی دیکھنا۔ گراف پڑھنا۔	زندگی میں آسانی، حساب کتاب کرنا چیزوں کی قیمت کا اندازہ لگانا، حساب رکھنا پیسے کا حساب کتاب کاروبار کرنا، باخبر رہنا، عملی اقدام کرنا کاروبار کے گراف پڑھنا، خرید و فروخت

	کا اندازہ ملکی درآمد و برآمد کا حساب سمجھنا زندگی میں سہولت پیدا کرنا، موسمی حالت کا اندازہ
تعداد ظاہر کرنا	مکمل کو ظاہر کرنا، حصّے ظاہر کرنا، فائدہ، نقصان، درجہ حرارت گیری، پیداوار، برسات

مکالمہ کا حاصل: **اعداد کا علم ہمیں زندگی گزارنے میں مدد گار ہے۔**

سرگرمی 2: **آئیے! پہچانیں اور دہرائیں۔**

اعداد کے سیٹ اور اس کی علامت	نام	کیا ہے؟
$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$	قدرتی اعداد	گنتی کے لیے استعمال، مقدار ظاہر کرنا۔
$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$	صحیح اعداد	قدرتی اعداد کے سیٹ میں 0 کا اضافہ کریں تو صحیح اعداد کا سیٹ کہلاتا ہے۔
$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$	مکمل اعداد	مثبت قدرتی اعداد اور منفی قدرتی اعداد پر مشتمل سیٹ، اس میں '0' نہ مثبت ہے نہ منفی۔
$Q = \left\{\frac{p}{q}, p \wedge q \in Q , q \neq 0\right\}$	ناطق اعداد	قدرتی اعداد اور مکمل اعداد کا سیٹ ہیں۔ کچھ مقداریں ایسی ہیں جو قدرتی اعداد اور مکمل

اعداد سے بھی ظاہر نہیں کر سکتے۔ مثلاً: $\frac{9}{11}$، ناطق اعداد $\frac{p}{q}, q \neq 0$ سے ظاہر کیے جاتے ہیں۔ p اور q مکمل اعداد ہیں لیکن شمار کنندہ کی قیمت 0 نہیں ہوتی۔		
وہ قدرتی اعداد جو کہ 2 سے پورا پورا تقسیم ہو جائیں۔	جفت اعداد	$E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$
وہ قدرتی اعداد جو کہ 2 سے پورا پورا تقسیم نہ ہو سکیں۔	طاق اعداد	$O = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$
ایسے اعداد جن کے تقسیم کرنے والے اعداد کا سیٹ '1' اور خود پر مشتمل ہو۔	مفرد اعداد	$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$

مشق نمبر 1

سرگرمی 1: اعداد کے سیٹ پہچانیں اور علامت لکھیں۔

علامت	سیٹ	نمبر شمار
	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$	(i)
	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$	(ii)
	$\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots\}$	(iii)
	$\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$	(iv)
	$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$	(v)
	$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$	(vi)
	$\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{11}, -1, 0, -\frac{1}{3}, \ldots\}$	(vii)

سرگرمی 2: (انفرادی) ذیل کے سیٹ پہچانیں اور نام لکھیں۔

نام	سیٹ	نمبر شمار
	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$	(i)
	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	(ii)
	$\{-2, -1, 0, +1, +2\}$	(iii)
	$\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$	(iv)
	$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$	(v)
	$(2, 3, 5, 7, 11, 13\}$	(vi)
	$\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 0, -1, -2, -\frac{3}{5}\}$	(vii)

سرگرمی 3(الف): سیٹوں کے نام لکھیں۔

نمبر شمار	بیان	سیٹ کا نام
(i)	قدرتی اعداد کے سیٹ میں 0 ملانے سے کون سے اعداد کا سیٹ بنتا ہے؟	
(ii)	کسی سیٹ میں 0 کے ساتھ مثبت اور منفی اعداد بھی ہوں تو وہ کون سا سیٹ ہو گا؟	

سرگرمی 3(ب): درست بیان کے سامنے ✓ اور غلط کے سامنے × کا نشان لگائیں۔

(i)	ناطق اعداد کا سیٹ '0'، منفی اعداد، مثبت اعداد اور کسور پر مشتمل ہوتا ہے۔	
(ii)	ایسا سیٹ جس کے ارکان 2 پر پورا پورا تقسیم ہو جائیں، جفت اعداد کا سیٹ کہلاتا ہے۔	
(iii)	مفرد اعداد کے جزو ضربی کا سیٹ صرف دو ارکان پر مشتمل ہوتے ہیں۔	

حصّہ دوم: تحتی سیٹ، واجب و غیر واجب تحتی سیٹ

سرگرمی 4: سیٹوں کا باہمی تعلق

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}, C = \{1, 3\}, D = \{1, 2, 3, 4\}$

نمبر شمار	سیٹوں کا باہم تعلق	علامتی اظہار
(i)	سیٹ B کے تمام ارکان سیٹ A کے ارکان بھی ہیں۔ لہٰذا سیٹ B تحتی سیٹ ہے سیٹ A کا۔	$B \subset A$

(ii)	سیٹ C کے تمام ارکان سیٹ A کے بھی رکن ہیں۔ لہٰذا سیٹ C تحتی سیٹ ہے سیٹ A کا۔	$C \subset A$
(iii)	سیٹ A کے تمام ارکان سیٹ D کے بھی رکن ہیں۔ لہٰذا سیٹ A ماتحت سیٹ ہے سیٹ D کا۔	$A \subset D$

ماتحت سیٹ کی علامت '$\subset$' ہے۔

سرگرمی 5: (الف) واجب و غیر واجب تحتی سیٹ (زبانی سرگرمی)

سیٹوں کا تعلق

1- سیٹ B اور سیٹ A کے ارکان کا تعلق:

(i) سیٹ B کے تمام ممبران سیٹ A کے بھی رکن ہیں۔ اس لیے سیٹ B تحتی سیٹ ہے سیٹ A کا اور سیٹ A بالا سیٹ ہے سیٹ B کا اس لئے سیٹ B سیٹ A کا تحتی سیٹ ہو گا۔

(ii) کیا سیٹ A اور سیٹ B مساوی سیٹ ہیں؟ $A \neq B$ (نہیں)

(iii) اس لیے سیٹ B سیٹ A کا ماتحتی سیٹ ہو گا۔ $B \subset A$

2- سیٹ B اور سیٹ C کے ارکان کا تعلق:

(i) سیٹ A کے تمام ممبران سیٹ C کے بھی رکن ہیں۔ اس لیے سیٹ C تحتی واجب سیٹ ہو گا سیٹ A کا۔

(ii) کیا سیٹ A اور سیٹ C مساوی سیٹ ہیں؟ $A = C$ (جی ہاں)

(iii) اس لیے سیٹ A سیٹ C کا واجب تحتی سیٹ ہو گا۔ $A \subseteq C$

مشق نمبر 2

سرگرمی 5: (ب) علامتی طور پر سیٹوں کا تعلق لکھیں

(i) اگر $A = \{a, b\}$ اور $B = \{b\}$ ہو تو سیٹ B کا سیٹ A سے تعلق بتائیں۔ علامتی طور پر لکھیں۔

(ii) $B = \{4, 5\}$ اور $A = \{1, 4, 5, 6\}$ ہو تو B کا A سے تعلق علامتی طور پر لکھیں ۔

(iii) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c\}$ ہو تو A اور B کون سے تحتی سیٹ ہیں؟ علامت میں لکھیں۔

(iv) $P = \{x, y, z\}$, $Q = \{x, y, z\}$ ہو تو P اور Q کون سے تحتی سیٹ ہیں؟ علامت میں لکھیں۔

حصّہ سوم: قوّت سیٹ

سرگرمی 6: (الف)

مثال نمبر 1:

آئیے! تحتی سیٹ لکھیں۔

$A = \{1, 2\}$

$= \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{\ \}$

ان سب تحتی سیٹ کا سیٹ، سیٹ A کا قوت سیٹ کہلاتا ہے۔

$P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{\ \}\}$ ...(i)

قوّت سیٹ: یہ کسی سیٹ کے تمام تحتی سیٹوں پر مشتمل سیٹ ہوتا ہے اسے P سے ظاہر کرتے ہیں۔

لہٰذا، اگر $A = \{1, 2\}$

تو $P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{\ \}\}$

مثال نمبر 2:

$B = \{a, b, c\}$

$P(B) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{\ \}\}$

مشق نمبر 3

سرگرمی 6:(ب) حل کریں۔

(i)	$A = \{3, 4\}$	$P(A) =$
(ii)	$T = \{a, b, c\}$	$P(T) =$
(iii)	$B = \{1\}$	$P(B) =$
(iv)	$N = \{N, O, R\}$	$P(N) =$
(v)	$X = \left\{\frac{a}{b}, \frac{b}{e}\right\}$	$P(X) =$
(vi)	$R = \{100, 101\}$	$P(R) =$

حصّہ چہارم: ڈی مورگن قانون کی تصدیق کرنا

ہم یونیورسل سیٹ اور کمپلیمنٹ سیٹ کو دہراتے ہیں۔

یونیورسل سیٹ:

ایسا سیٹ جس میں زیر غور مسئلے سے تعلق رکھنے والے تمام ممبران موجود ہوں۔

مثلاً: اگر ہم قدرتی اعداد پر غور کر رہے ہیں تو اس صورت میں یونیورسل سیٹ تمام قدرتی اعداد کا سیٹ ہو گا۔

اگر ہم کاروں پر غور کریں تو اس صورت میں یونیورسل سیٹ میں تمام کاریں شامل ہوں گی۔

کائناتی سیٹ کو U سے ظاہر کرتے ہیں۔

سیٹ کا کمپلیمنٹ:

اگر U ایک یونیورسل سیٹ ہو اور A اس کا تحتی سیٹ ہو تو U – A کو سیٹ کا کمپلیمنٹ سیٹ کہتے ہیں۔ اسے A′ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال نمبر 1:

اگر A = {1, 2} اور U = {1, 2, 3, 4} ہو تو

$A' = U - A = \{1, 2, 3, 4\} - \{1, 2\}$

$A' = \{3,4\}$ جواب:

مثال نمبر 2:

اگر B = {a, b, 5} اور U = {a, b, c, 5, 6} ہو تو

$B' = U - B = \{a, b, c, 5, 6\} - \{a, b, 5\}$

$B' = \{c, 6\}$ جواب:

ڈی مارگن کا قانون: (i) (AYB)′ = A′IB′

(ii) (AIB)′ = A′YB′

مثال نمبر 1:

اگر B = {2, 3, 4}، A = {1, 2, 3} اور U = {1, 2, 3, 4} ہو تو ڈی مورگن قانون کی تصدیق کریں۔

ڈی مارگن کا قانون: **(i)** **(AYB)′ = A′IB′** **(ii)** **(AIB)′ = A′YB′**

(i) **(AYB)′ = A′IB′**

L.H.S. (AYB)′ = U – {1, 2, 3} Y {2, 3, 4}
= U – {1, 2, 3, 4}
= { }

R.H.S. A′ = U – A
= {1, 2, 3, 4}– {1,2,3}
= {4}

B′ = U – B
= {1, 2, 3, 4}– {2,3,4}
= {1}

A′IB′ = { } I {1}
= { }

∴ L.H.S. = R.H.S. تصدیق ہو گئی

(ii) **(AIB)′ = A′YB′**

L.H.S. (AIB)′

AIB = {1, 2, 3} I {2, 3, 4} = {2, 3}
(AIB)′ = U – (AIB)′ = {1, 2, 3, 4} – {2, 3}
= {1, 4}

R.H.S. A′YB′

A′ = U – A = {1, 2, 3, 4} – {1, 2, 3}
A′ = {4}
B′ = U – B = {1, 2, 3, 4} – {2, 3, 4}
B′ = {1}
A′YB′ = {4} Y {1}
A′YB′ = {1, 4}

∴ L.H.S. = R.H.S. تصدیق ہو گئی

مشق نمبر 4

سرگرمی 1: **ڈی مورگن قوانین کی تصدیق کریں۔**

(i) $(AYB)' = A'IB'$ **(ii)** $(AIB)' = A'YB'$

1. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5\}$
2. $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d\}$
3. $U = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$, $A = \{+1, +2, +3\}$, $B = \{-1, -2, -3\}$

یونٹ 2 حقیقی اعداد

حصّہ اوّل: ناطق اور غیر ناطق اعداد

ناطق اعداد:

ایسے اعداد جو کہ $\frac{p}{q}$ کی صورت میں ہوں (جبکہ p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ہو) ان کو ناطق اعداد کہتے ہیں ناطق اعداد کو Q سے ظاہر کیا جاتا ہے

-

(i) یہ مثبت اور منفی دونوں ہو سکتے ہیں۔

(ii) صحیح اعداد بھی ناطق اعداد ہیں کیوں کہ انھیں بھی $\frac{p}{q}$ کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

مثلاً مختتم کسور 125، 1.2، 13.07 بھی ناطق اعداد ہیں۔ کیوں ہم انھیں درج ذیل طریقے سے بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$125 = \frac{125}{1}, 1.2 = \frac{12}{10}, 13.04 = \frac{1304}{100}$$

اسی طرح 0.123 کو بھی ہم $\frac{p}{q}$ کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔ یعنی

$$0.123 = \frac{0123}{1000} = \frac{123}{1000}$$

غیر ناطق اعداد:

ایسے اعداد جن کو ہم $\frac{p}{q}$ کی صورت میں نہ ظاہر کر سکیں اور ان کا حاصل مختتم کسور یا غیر متوالی کسور اعشاریہ ہو ان کو غیر ناطق اعداد کہتے ہیں ۔ علامتی طور پر ان کو Q' سے ظاہر کرتے ہیں ۔

مثلاً دائرے کے قطر اور محیط کے درمیان نسبت مستقل رہتی ہے۔ لہٰذا وہ ایک غیر ناطق عدد ہے۔ اسی طرح ...0.333 اور ...0.111 بھی غیر ناطق اعداد ہیں۔

(i) مثلاً غیر مختتم کسور، غیر متوالی کسورِ اعشاریہ 1.73۔

کیوں کہ انھیں $\frac{p}{q}$ کی شکل میں تحویل کرنا ممکن نہیں ہوتا۔

1.7320508 اور 1.414235 وغیرہ۔

(ii) ایسے اعداد جن کے مکمل جذر المربع نہ نکل سکیں، غیر ناطق اعداد ہوتے ہیں۔ مثلاً $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ وغیرہ۔ جبکہ ناطق اعداد کا مکمل جذر المربع حاصل ہوسکتا ہے مثلاً $\sqrt{125}$ ، $\sqrt{9}$

سرگرمی 1: غیر مختتم/غیر متوالی کسر اعشاریہ:

ذیل کی مثالوں پر غور کریں۔

مثال نمبر 1: $\frac{3}{5}$ کو کسرِ اعشاریہ میں تحویل کریں۔

$$\begin{array}{r|l} & 0.6 \\ \hline 5 & 30 \\ & 30 \\ \hline & 0 \\ \hline \end{array}$$

جواب $= \frac{3}{5} = 0.6$

یہ مختتم اعشاریہ ہے اور یہ ناطق عدد ہے۔

مثال نمبر 2: $\frac{10}{9}$ کو کسرِ اعشاریہ میں تحویل کریں۔

$$\begin{array}{r|l} & 1.111\ldots \\ \hline 9 & 10 \\ & -9 \\ \hline & \;\;10 \\ & \;\;-9 \\ \hline & \;\;\;\;10 \\ & \;\;\;\;-9 \\ \hline & \;\;\;\;\;\;10 \\ & \;\;\;\;\;\;-9 \\ \hline & \;\;\;\;\;\;\;\;1 \\ \hline \end{array}$$

جواب $= \frac{10}{9} = 1.111\ldots$

یہ غیر مختتم اور غیر متوالی کسرِ اعشاریہ ہے۔

ہم کسی بھی کسرِ اعشاریہ کو حل کر کے معلوم کر سکتے ہیں کہ وہ مختتم

اعشاریہ ہے یا غیر متوالی ہے یا ناطق عدد ہے۔

حصّہ دوم: حقیقی اعداد

حقیقی اعداد:

ناطق اعداد کا سیٹ اور غیر ناطق اعداد کا سیٹ (Q') کا یونین حقیقی اعداد کا سیٹ کہلاتا ہے۔ اسے R سے ظاہر کرتےہیں۔

$$R = Q \cup Q'$$
$$= \{x \mid x \in Q \vee x \in Q'\}$$

حقیقی عدد کو عددی خط پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ تمام اعداد حقیقی اعداد کا تحتی سیٹ ہیں۔

$$N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$$

مشق نمبر 1

سرگرمی 2:(الف) مختتم اور متوالی کسور معلوم کریں۔

(i) $\frac{-4}{5}$ (ii) $\frac{1}{7}$ (iii) $\frac{1}{11}$

(iv) $\frac{1}{2}$ (v) $-\frac{2}{9}$ (vi) 2

(vii) 4

سرگرمی 2:(ب) پہچانیں اور (✓) کا نشان لگائیں۔

نمبر شمار	عدد	ناطق عدد	غیر ناطق عدد
1	$\frac{1}{2}$		
2	$\frac{-3}{5}$		
3	2		
4	$\frac{-3}{7}$		
5	$\sqrt{25}$		

6	4.755		
7	$\sqrt{9}$		
8	0.333		
9	$\sqrt{3}$		
10	$\sqrt{7}$		
11	$\sqrt{64}$		
12	$\frac{1}{7}$		
13	$\sqrt{25}$		

حصّہ سوم: جذر المربع

ہم پڑھ آئے ہیں کہ کسی عدد کو خود سے ضرب دینے سے جو عدد حاصل ہوتا ہے وہ مربع کہلاتا ہے اور وہ عدد اس مربع کا جذر المربع کہلاتا ہے۔ مثلاً

$$5 \times 5 = 25$$

یہاں 25 مربع ہے اور 5 اس کا جذر المربع کہلاتا ہے۔ علامتی طور پر اسے ایسے لکھتے ہیں $\sqrt{25} = 5$

جذرالمربع کو دو طرح سے معلوم کیا جاتا ہے۔

(i) تقسیم کا طریقہ

(ii) مفرد تجزی کا طریقہ

(i) تقسیم کا طریقہ:

اس طریقہ میں جس عدد کا جذر المربع معلوم کرنا ہوتا ہے اس کے:

☑ دائیں جانب سے جوڑے بنانا شروع کریں۔ مثلاً

$\hat{2}\ \overline{04}\ \overline{49}$ $\hat{2}$ ، $\overline{04}$ ، $\overline{49}$

☑ اگر عدد ایک ہے تو پہاڑہ پڑھتے ہیں کہ وہ اس کے قریب پہنچ جائے۔ اگر دو عدد ہیں تو ایک جوڑا بنا لیتے ہیں اور ایسا عدد معلوم کریں جس کو آپس

میں ضرب کرنے سے وہ اس عدد کے قریب پہنچ جائے یا کم رہے۔ پھر باقی تفریق کا عمل کرتے ہیں اور عمل رُک جائے گا۔ اس طرح تقسیم کا عمل مکمل کرتے ہیں۔

☑ اگر تین عدد ہیں مثلاً $\overline{2}\,\overline{25}$ تو پھر کے لیے پہاڑہ پڑھیں گے۔ پھر اس میں سے تفریق کر کے باقی بچنے والے عدد کے دائیں جانب بقایا جوڑے کو اُتار کر نیا عدد بناتے ہیں۔ اس طرح تقسیم کا عمل مکمل کرتے ہیں۔

ذیل کی مثالیں دیکھیں۔

سرگرمی 3:

تقسیم کا طریقہ:

مثال نمبر 1: 64 کا جذر المربع نکالیں۔

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ \hline 8 & \overline{64} \\ & 64 \\ \hline & 0 \\ \hline \end{array}$$

جواب $8 = \sqrt{64} =$

مثال نمبر 2: 225 کا جذر المربع نکالیں۔

$$\begin{array}{r|l} & 15 \\ \hline 1 & \overline{2}\,\overline{25} \\ & 1 \\ \hline 25 & 125 \\ & 125 \\ \hline & \ \ 0 \\ \hline \end{array}$$

جواب $15 = \sqrt{225} =$

(ii) مفرد تجزی سے جذر المربع:

مثال نمبر 1: 144 کا جذر المربع نکالیں۔

$$\begin{array}{r|l} 2 & 144 \\ \hline 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

جزو ضربی کے جوڑے بنائیں۔

$$= \overline{2\times 2} \times \overline{2\times 2} \times \overline{3\times 3}$$

$$= 2\times 2\times 3$$

$$= 12$$

جواب $= \sqrt{144} = 12$

مثال نمبر 2: $\frac{81}{64}$ کا جذر المربع نکالیں۔

نسب نُما	شمار کنندہ
$\begin{array}{r\|l} 3 & 81 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 0 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 2 & 64 \\ \hline 2 & 32 \\ \hline 2 & 16 \\ \hline 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline & 0 \end{array}$

جزو ضربی کے جوڑے بنائیں۔

$$= \overline{3\times 3} \times \overline{3\times 3} \quad ; \quad = \overline{2\times 2} \times \overline{2\times 2} \times \overline{2\times 2}$$

$$= 3\times 3 \quad ; \quad = 2\times 2\times 2$$

$$= 9 \quad ; \quad = 8$$

جواب $= \sqrt{\frac{81}{64}} = \frac{9}{8}$

مثال نمبر 3: 0.64 کا جذر المربع معلوم کریں۔

$$0.64 = \frac{64}{100}$$

اَب نسب نما اور شمار کنندہ کا جذر المربع الگ الگ معلوم کریں۔

$$\begin{array}{r|l} 2 & 64 \\ \hline 2 & 32 \\ \hline 2 & 16 \\ \hline 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 100 \\ \hline 2 & 50 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 0 \end{array}$$

0

جزو ضربی کے جوڑے بنائیں۔

$$= \sqrt{2\times2}\times\sqrt{2\times2}\times\sqrt{2\times2} \quad ; \quad = \sqrt{2\times2}\times\sqrt{5\times5}$$

$$= 2\times2\times2 \quad ; \quad = 2\times5$$

$$= 8 \quad ; \quad = 10$$

$$= \sqrt{64} \quad ; \quad = \sqrt{100}$$

$$= 8 \quad ; \quad = 10$$

$$\sqrt{0.64} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$ جواب

مثال نمبر 4: $\sqrt{0.09}$ کا جذر المربع معلوم کریں۔

$$0.09 = \frac{9}{100}$$

اَب نسب نما اور شمار کنندہ کا جذر المربع الگ معلوم کریں۔

$$\begin{array}{r|l} 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 100 \\ \hline 2 & 50 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 0 \end{array}$$

جزو ضربی کے جوڑے بنائیں۔

$$= \sqrt{3\times3} \quad ; \quad = \sqrt{2\times2}\times\sqrt{5\times5}$$

$$= 3 \quad ; \quad = 2\times5$$

$$= 3 \quad ; \quad = 10$$

$$= \sqrt{9} \quad ; \quad = \sqrt{100}$$

$$= 3 \quad ; \quad = 10$$

$$\sqrt{0.09} = \frac{3}{10}$$ جواب

مشق نمبر 2

سرگرمی 4:

سوال 1: **ذیل کے مکمل مربع معلوم کریں۔**

(i) 10 (ii) 12 (iii) 16 (iv) 33

سوال 2: **جذر المربع معلوم کریں، تقسیم والے طریقےسے۔**

(i)	81	(ii)	1025	(iii)	1600	(iv)	961
(iv)	$\frac{64}{121}$	(v)	$\frac{169}{289}$	(vi)	$1\frac{25}{144}$	(vii)	$\frac{144}{225}$
(ix)	7.84	(x)	30.25	(xi)	5.29	(xii)	10.21

سرگرمی 5:

ایسے اعداد کا جذر المربع معلوم کرنا جو مکمل مربع نہ ہوں۔

ہم ایسے اعداد کا جذر المربع بھی معلوم کر سکتے ہیں جو کہ مکمل مربع نہ ہوں۔ مثلاً $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{17}$ وغیرہ۔ یہ جذر جتنے درجہ درکار ہوتا ہے ہم اتنے صفر جوڑوں میں نقطہ اعشاریہ کے بار لگا دیتے ہیں اور تقسیم کے طریقہ سے جذر المربع نکالتے ہیں۔ ذیل کی مثال دیکھیں۔

مثال نمبر 1: 2 کا جذر المربع معلوم کریں (دو درجہ اعشاریہ تک)۔

	1.41
1	2.0000
1	-1
24	100
4	–96
281	400
1	–281
282	19

لہٰذا، $\sqrt{2} = 1.41$

مثال نمبر 2: 30.2 کا جذر المربع معلوم کریں (دو درجہ اعشاریہ تک)۔

	5.499
5	30.200000
5	-25
104	520
4	–416
1049	10400
9	–9441
10589	95900
9	–95301
10589	599

لہٰذا، $\sqrt{30.2} = 5.499$

حقیقی زندگی میں جذر المربع پر مبنی مسائل

مثال نمبر 1: ایک اسکول کی کیاری میں 121 آم کے پودے لگائے گئے۔ ہر قطار میں اتنے ہی پودے ہیں جتنے کے آم کے درخت ہر قطار میں درخت معلوم کریں۔

	11
1	121
1	-1
21	21
1	-21

لہٰذا، کُل 11 قطاریں ہیں۔

مثال نمبر 2: ایک مربع شکل گراؤنڈ کا رقبہ 225 مربع میٹر ہے تو ایک ضلع کی پیمائش کیا ہو گی؟

	15
1	225
1	-1
25	125
5	–125
30	0

لہٰذا، ایک ضلع کی پیمائش 30 میٹر ہو گی۔

مثال نمبر 3: ایک اسکول کی اسمبلی میں 625 طالب علموں نے شرکت کی۔ ایک قطار میں اتنے ہی طالب علم ہیں جتنی قطاریں۔ تو قطاروں کی تعداد معلوم کریں۔

	25
2	625
4	4
45	225
5	–225

لہٰذا، ہر قطار میں 25 طالب علم ہیں۔

مثال نمبر 4: ایک نمائش میں جتنی قطاریں تھیں اتنے ہی کھلونے دکھائے گئے۔

اگر کھلونوں کی تعداد 1089 ہو تو کتنی قطاریں بنی ہیں؟

	33
3	1089
3	9
63	189
3	−189
66	0

لہٰذا، کُل 33 قطاریں بنیں۔

مشق نمبر 3

سرگرمی 6:

سوال 1: ذیل کا جذر المربع دو درجی اعشاریہ تک معلوم کریں۔

(i) 5 (ii) 13 (iii) 180 (iv) 2.5

(v) 44.7 (vi) 600.69

سوال 2: ایک محلے میں جتنے گھر ہیں اتنی ہی گلیاں ہیں۔ اگر گھروں کی کُل تعداد 81 ہو تو کتنی قطاریں ہوں گی؟

سوال 3: وہ کون سا عدد ہے جسے اگر خود سے ضرب کریں تو 100 حاصل ہوتا ہے۔

سوال 4: ایک ادارے نے ایک فلاحی کام کے لیے چندہ اکٹھا کیا۔ جتنے لوگ تھے ہر ایک نے اتنی ہی رقم چندہ دی۔ اگر کُل رقم 3364 روپے جمع ہوئے تو بتائیں ہر ایک نے کتنا چندہ دِیا؟

سوال 5: ایک آڈیٹوریم میں اتنے ہی چارٹ لگائے گئے تھے جتنی قطاریں تھیں۔ اگر کُل 1089 چارٹ لگائے گئے ہوں تو بتائیں کہ کتنی قطاریں ہیں؟

سوال 6: ایک مربعی کمرہ میں کُل 121 ٹائل لگے۔ ہر طرف کتنے ٹائل لگے؟

سوال 7: ایک مربع کھیت کا رقبہ 1849 مربع میٹر ہے تو ایک ضلع کی پیمائش کتنی ہو گی؟

حصّہ چہارم: مکعب اور جذرالمکعب

مکعب وہ عدد ہوتا ہے جسے 3 کی قوت میں ظاہر کرتے ہیں۔ یعنی عدد کا خود کو تین مرتبہ ضرب دینا۔

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

8 مکعب عدد ہے جب کہ 2 جذرالمکعب ہے۔ اس لیے 8 کا جذرالمکعب 2 ہے۔ اس کو علامتی طور پر $\sqrt[3]{8}$ لکھتے ہیں۔

ذیل کی مثالیں دیکھیں۔

مثال نمبر 1: $1 \times 1 \times 1 = 1^3 = 1$ یعنی '1' کا جذرالمکعب بھی '1' ہے۔ لہٰذا، '1' کا جذرالمکعب '1' ہے۔

مثال نمبر 2: $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$ لہٰذا، '27' کا جذرالمکعب '3' ہے۔$\sqrt[3]{27}$

مثال نمبر 3: $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$ لہٰذا، '125' کا جذرالمکعب '5' ہے۔ $\sqrt[3]{125}$

مکمل مکعب: یہ وہ عدد ہوتا ہے جو کسی صحیح عدد خود کو اپنے آپ سے تین دفعہ ضرب کرنے سے آتا ہے۔

سرگرمی 7:

مثال نمبر 1: $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$

مثال نمبر 2: $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

مثال نمبر 3: $1.2^3 = 1.2 \times 1.2 \times 1.2 = 1.808$

لہٰذا، 343، 7 کا مکمل مکعب ہے۔ 1000، 10 کا مکمل مکب ہے۔ 1.808، 1.2 کا مکمل مکعب ہیں۔

مشق نمبر 4

سرگرمی 8:

سوال 1: جذر المکعب اور مکعب کو الگ الگ خانے لکھیں۔

مکعب	جذر المکعب	مثال	نمبر
		$3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$	i
		$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 62$	ii
		$6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$	iii
		$9 \times 9 \times 9 = 9^3 = 729$	iv
		$10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000$	v

سوال 2: ذیل کے مکعب معلوم کریں اور خالی خانے میں لکھیں۔

مکعب	عدد	نمبر
	5	i
	7	ii
	11	iii
	12	iv
	14	v

سوال 3: ذیل کے جذرالمکعب معلوم کریں اور خالی خانے میں لکھیں۔

جذرالمکعب	عدد	نمبر
	64	i
	81	ii
	341	iii
	512	iv
	0.5	v

سوال 4: ذیل میں سے مکعب اور مربع علیحدہ کریں ۔

مربع	مکعب	عدد	نمبر
		8	i
		27	ii
		64	iii

		25	iv
		625	v

یونٹ 3 عددی نظام

حصّہ اوّل: اساس 2، 5، 8 اور 10 پر مبنی عددی نظام کی تعریف

سرگرمی 1: مکالمہ (اعشاری نظام سے آگاہی)

1– ہم حساب کتاب رکھنے کے لیے کون سے اعداد استعمال کرتے ہیں لکھیں۔
سب طالب علموں کے جوابات دیکھتے ہوئے استاد پوچھے گا کہ ان نمبروں میں سے واحد ہندسہ پر مبنی نمبر کتنے ہیں؟

2– شاباش! ہم حساب کتاب کے لیے ذیل کے اعداد استعمال کرتے ہیں۔

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

3– اِن کی تعداد کتنی ہے؟ (گنیں) (دَس)

4– اگر ہمیں 10 چیزیں لکھنی ہوتی ہیں تو ہم کیا کرتے ہیں ؟
'1' اور '0' کو ملا کر 10 (دَس) کا عدد بناتے ہیں۔

5– کیا دَس کا ہندسہ کوئی الگ سے ہے؟ (نہیں)
ہم انھی اعداد میں سے دو اعداد '1' اور '0' کو ملا کر دَس کی نشانی '10' بناتے ہیں۔

6– اِس نظام کو ہم اعشاری نظام کہتے ہیں کیوں کہ اس کی اساس دَس پر ہے۔ اس میں دَس ہندسے استعمال ہوتے ہیں، اس کی بنیاد (قوت) 10 پر ہے۔ اس میں ضرب، تقسیم کی آسانی ہوتی ہے۔
اس نظام کا ہر ہندسہ 10 کی قوت پر مبنی ہوتا ہے۔
مثلاً 12 کو ہم قوتِ اعشاری میں ایسے ظاہر کریں گے:

$12 = 10 + 2$ |چونکہ $1^0 = 1$|

$= 10^1 + 2 \times 10^0$

مثال: اسی طرح 2546 کو ہم اعشاری اساس میں اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔

10	2546
10	254 – 6
10	25 – 4
	2 – 5

چونکہ بنیاد 10 ہے اس لیے اسے تقسیم کریں اور باقی آگے لکھیں۔ یہ عمل جاری رکھیں تا وقتیکہ تقسیم کنندہ سے تقسیم کیا جانے والا عدد چھوٹا ہو جائے۔

لہٰذا، $2546 = 2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 6 \times 10^0$

مشق نمبر 1

سوال 1: اعشاری اساس میں ظاہر کریں۔

(i) 25 (ii) 149 (iii) 650 (iv) 1000

(v) 9576 (vi) 98079

دُنیا کی ترقی میں ایٹمی قوت، کمپیوٹر، سیٹیلائیٹ کا استعمال اور خلائی دوڑ جیسے اہم معاملات اہمیت کے حامل ہیں۔ آج کل سائنس و ٹیکنالوجی کا دَور ہے۔ ہر کام مشینوں سے اور بہتر انداز میں کرنے کی ضرورت ہے۔ سائنسی ایجادات کی رفتار اتنی زیادہ ہے کہ ہمیں ایک عددی نظام کے علاوہ دوسرے عددی نظام کی ضرورت پڑتی ہے تاکہ معلومات حاصل کی جا سکیں اور انھیں انسانی بھلائی کے کاموں میں استعمال کیا جا سکے۔

آئیے! دوسرے اساس کے عددی نظام سے آگاہی حاصل کریں۔

(i) دوسرے اساس کے عددی نظام:

(الف) اساس دو کا نظام یا ثنائی نظام:

اس نظام کی بنیاد دو پر ہے، یعنی اس کی اساس دو ہے اس لیے اس میں دو ہندسے استعمال ہوتے ہیں '0' اور '1'۔

اس نظام کی سب سے بڑی علامت '1' ہے۔ جس طرح اعشاری نظام میں ہم دَس کی تعداد ظاہر کرنے کے لیے 9 میں ایک جمع کر کے 10 لکھتے ہیں اسی طرح ثنائی نظام میں 1 میں 1 جمع کرنے سے دو ہوتا ہے۔ اسے 10 لکھتے ہیں اور ایک صفر پڑھتے ہیں۔ ثنائی نظام میں ظاہر کرنے کے لیے علامتی طور پر اسے 10_2 لکھتے ہیں۔

(ب) اساس پانچ (خمسی) عددی:

اس نظام کی بنیاد 5 پر ہوتی ہے یعنی اس کی اساس پانچ ہے۔ اس میں تعداد ظاہر کرنے کے لیے پانچ ہندسے 0, 1, 2, 3, 4 استعمال ہوتے ہیں۔

جس طرح اعشاری عددی نظام میں دَس کی تعداد کو ظاہر کرنے کے لیے ہم '0' اور '1' کو ملا کر '10' سے ظاہر کرتے ہیں اسی طرح چار چیزوں میں ایک اور ملا کر پانچ ہوئے تو ہم '0' اور '1' کو ملا کر '10' سے پانچ کو ظاہر کرتے ہیں۔ یعنی خمسی نظام میں 5 کو 10_5 سے ظاہر کریں گے۔

(ج) اساس 8 کا عددی نظام:

اس نظام کی بنیاد 8 پر ہوتی ہے۔ یعنی اس کی اساس آٹھ ہے اس میں تعداد کو ظاہر کرنے کے لیے آٹھ علامات 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 استعمال ہوتی ہیں۔

اگر تعداد 7 سے زیادہ ہو تو '0' اور '1' کو ملا کر '10' بنا لیتے ہیں۔ اساس 8 کی بنیاد میں 8 کو 10_8 لکھتے ہیں۔

(ii) اعداد کو اعشاری عددی نظام سے دوسرے عددی نظام میں تحویل کرنا:

(الف)اعداد کو ثنائی نظام میں تحویل کرنا:

مثال نمبر 1: 11 کو ثنائی عددی نظام میں تحویل کریں۔

حل: ہم اس کے لیے تقسیم کا عمل کرتے ہیں۔

11 کو بار بار 2 سے تقسیم کرتے ہیں۔ جب تک خارج قسمت 1 نہ رہ جائے عمل جاری رکھتے ہیں۔

	11
2	11
2	5 – 1
2	2 – 1
	1 – 1

لہٰذا، $11 = 1111_2$

مثال نمبر 2: 205 کو ثنائی عددی نظام میں تحویل کریں۔

حل:

2	205
2	102 – 1
2	51 – 0

2	45 – 1
2	22 – 1
2	11 – 0
2	5 – 1
2	2 – 1
	1 – 0

لہٰذا، 205 = 101101101

(ب) اعداد کو خمسی نظام میں تحویل کرنا:

مثال نمبر 1: 697 کو خمسی عددی نظام میں تحویل کریں۔

حل:

5	697
5	139 – 2
5	27 – 4
	5 – 2

لہٰذا، $697_{10} = 5242_5$

مثال نمبر 2: 4085 کو خمسی عددی نظام میں تحویل کریں۔

حل:

5	4085
5	817 – 0
5	163 – 2
5	32 – 3
5	6 – 2
	1 – 1

لہٰذا، $4085_{10} = 12320_5$

(ج) اعداد کو اساس 8 کے نظام میں تحویل کرنا:

مثال نمبر 1: 968 کو اساس 8 کے نظام میں تحویل کریں۔

حل:

8	968
8	121 – 0
8	15 – 1
	1 – 7

لہٰذا، $968_{10} = 1710_8$

مثال نمبر 2: 1979_{10} کو اساس 8 کے نظام میں تحویل کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 1979 \\ \hline 8 & 247 - 3 \\ \hline 8 & 30 - 7 \\ \hline & 3 - 6 \end{array}$$

لہٰذا، $1979_{10} = 3637_8$

مشق نمبر 2

مندرجہ ذیل کو ثنائی، خمسی اور اساس 8 کے نظام میں تحویل کریں۔

اساس کا نظام	خمسی نظام	ثنائی نظام	اعشاری نظام
			12
			50
			89
			109
			150

(iii) دوسرے عددی نظاموں سے اعشاری نظام میں تحویل کرنا:

(الف) ثنائی نظام سے اعشاری نظام میں تحویل کرنا:

مثال نمبر 1: اعشاری نظام میں تحویل کریں۔

(i) 11_2 (ii) 101_2 (iii) 101010_2

حل:

(i) $11_2 = 1 \times 10_2^1 + 1 \times 10_2^0 \qquad = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 2 + 1 \qquad = 3$

(ii) $101_2 = 1 \times 10_2^2 + 0 \times 10_2^1 + 1 \times 10_2^0$

$= 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 1 \times 4 + 0 \times 1 + 1 \times 1 \qquad = 4 + 0 + 1 \quad = 5$

(iii) $101010_2 = 1 \times 10_2^5 + 0 \times 10_2^4 + 1 \times 10_2^3 + 0 \times 10_2^2 + 1 \times 10_2^1 + 0 \times 10_2^0$

$= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

$= 1 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1$

$$= 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 0 \qquad = 32 + 8 + 2 = 42$$

(ب) خمسی نظام سے اعشاری نظام میں تحویل کرنا:

مثال نمبر 1: اعشاری نظام میں تحویل کریں۔

(i) 43_5 (ii) 1430_5 (iii) 30414_5

حل:

(i) $43_5 = 4 \times 5^2 + 3 \times 5^0$

$= 4 \times 5 + 3 \times 1 = 20 + 3$

$43_5 = 23$

(ii) $1430_5 = 1 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 0 \times 5^0$

$= 1 \times 125 + 4 \times 25 + 3 \times 5 + 0 \times 1$

$= 125 + 100 + 15 + 0$

$1430_5 = 240$

(iii) $30414_5 = 3 \times 5^4 + 0 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 4 \times 5^0$

$= 3 \times 625 + 0 \times 125 + 4 \times 25 + 1 \times 5 + 4 \times 1$

$= 1875 + 0 + 100 + 5 + 4$

$30414_5 = 1984$

(ج) اساس 8 سے اعشاری نظام میں تحویل کرنا:

مثال نمبر1: اعشاری نظام میں تحویل کریں۔

(i) 505_8 (ii) 2436_8 (iii) 71503_8

حل:

(i) $505_8 = 5 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 5 \times 8^0$

$= 5 \times 64 + 0 \times 8 + 5 \times 1 \quad = 69 + 0 + 5$

$505_8 = 74$

(ii) $2436_8 = 2 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 6 \times 8^0$

$= 2 \times 512 + 4 \times 64 + 3 \times 8 + 6 \times 1$

$= 1024 + 256 + 24 + 6$

$2436_8 = 1310$

(iii) $71503_8 = 7 \times 8^4 + 1 \times 8^3 + 5 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 3 \times 8^0$

$= 7 \times 6096 + 1 \times 512 + 5 \times 64 + 0 \times 1 + 3 \times 1$

$= 42582 + 512 + 340 + 0 + 3$

$71503_8 = 53437$

مشق نمبر 3

سوال 1: ذیل میں ثنائی اعداد کو اعشاری عددی نظام میں تحویل کریں۔

(i) 1011_2 (ii) 1111_2 (iii) 110101_2 (iv) 1111010_2

سوال 2: خمسی نظام کے اعداد کو اعشاری نظام میں تحویل کریں۔

(i) 32_5 (ii) 4031_5 (iii) 34014_5 (iv) 334412_5

سوال 3: اساس 8 کے نظام سے اعشاری نظام میں تحویل کریں۔

(i) 26_8 (ii) 40_8 (iii) 430_8 (iv) 4452_8

(iv) اساس 2، 5 اور 8 کے اعداد کی جمع، تفریق اور ضرب:

(الف)ثنائی نظام میں اعداد کی جمع:

جمع کا جدول ثنائی عددی نظام میں

+	0	1
0	0	1
1	0	10

ثنائی نظام میں جمع کا عمل:

$0_2 + 0_2 = 0_2$

$0_2 + 1_2 = 1_2$

$1_2 + 1_2 = 10_2$

اسی طرح $1_2 + 1_2 + 1_2 = 11_2$

مثال نمبر 1: 101_2 کو 111_2 میں جمع کریں۔

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 101 \\ +\ 111 \\ \hline 1100 \\ \hline \end{array}$$

مراحل:

(i) جمع کے عمل کی طرح اعداد کو رکھیں۔

دائیں طرف سے جمع کریں۔

$1_2 + 1_2 = 10_2$

اس لیے 0 کو اس کے نیچے اور 1 کو اگلے عدد کے اُوپر حاصل لیں گے۔

(ii) اَب $1 + 0 + 1 = 10$

یہاں 0 کو ان اعداد کے نیچے اور 1 کو اگلے عدد کے اوپر حاصل لکھیں گے۔

(iii) اَب $1 + 1 + 1 = 11_2$

ہم یہ جواب تیسرے عدد کے نیچے لکھیں گے۔

مثال نمبر 2: $11110_2 + 10101_2$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 11110 \\ +\ 10101 \\ \hline \end{array}$$

مثال نمبر 3: $1010_2 + 1110_2 + 1101_2$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 1010 \\ 1110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{1100112} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{+\ \ 1101} \\ \underline{10101} \end{array}$$

(ب) ثنائی نظام میں اعداد کی تفریق:

مثال نمبر 1: 101_2 میں سے 10_2 تفریق کریں۔ **مثال نمبر 2:** 1101_2 میں سے 1011_2 تفریق کریں۔

$$\begin{array}{r} 101_2 \\ \underline{-\ \ 10_2} \\ \underline{11_2} \end{array}$$

لہٰذا، $101_2 - 10_2 = 11_2$

$$\begin{array}{r} 1101_2 \\ \underline{-1011_2} \\ \underline{110_2} \end{array}$$

لہٰذا، $1101_2 - 1011_2 = 110_2$

(ج) ثنائی نظام میں ضرب کا عمل:

مثال نمبر 1: ضرب کریں۔ $11_2 \times 10_2$

$$\begin{array}{rl} 11_2 & \\ \underline{\times\ \ 10_2} & \\ 00 & \text{(0 سے ضرب)} \\ \underline{11\times} & \text{(1 سے ضرب)} \\ \underline{110_2} & \text{(جمع کرنے سے)} \end{array}$$

لہٰذا، $11_2 \times 10_2 = 110_2$

ثنائی عددی نظام میں ضرب کا جدول
$0 \times 0 = 0$
$0 \times 1 = 0$
$1 \times 1 = 1$

مثال نمبر 2: ضرب کریں۔ $1111_2 \times 101_2$

$$\begin{array}{r} 1111_2 \\ \underline{\times\ \ 101_2} \\ 1111 \\ 0000\times \\ \underline{1111\times\times} \\ \underline{1001011_2} \end{array}$$

لہٰذا، $1111_2 \times 101_2 = 1001011_2$

مشق نمبر 4

سوال 1: **ثنائی عددی نظام میں جمع کریں۔**

(i) $11_2 + 110_2$ (ii) $1001_2 + 1110_2$

(iii) $111_2 + 1011_2$ (iv) $1010_2 + 10111_2$

سوال 2: ثنائی عددی نظام میں تفریق کریں۔

(i) $1101_2 - 110_2$ (ii) $1011_2 - 1011_2$

(iii) $110110_2 - 1101_2$ (iv) $1111_2 - 1001_2$

سوال 3: ثنائی عددی نظام میں ضرب کریں۔

(i) $101_2 \times 10_2$ (ii) $111_2 \times 1011_2$

(iii) $11101_2 \times 101_2$ (iv) $10111_2 \times 10011_2$

خمسی نظام میں اعداد کی جمع، تفریق اور ضرب

(الف)خمسی نظام میں اعداد کی جمع:

خمسی نظام میں جمع کا جدول

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

مثال نمبر 1: 123_5 اور 2113_5 کو جمع کریں۔

$$\begin{array}{r} ② ① \\ 2\,1\,1\,3 \\ +\quad 1\,2\,3 \\ \hline 2\,2\,4\,0_5 \\ \hline \end{array}$$

مثال نمبر 2: 12003_5 اور 33134_5 کو جمع کریں۔

$$\begin{array}{r} ① \quad ① \\ 3\,3\,1\,3\,4 \\ +\quad 1\,2\,0\,0\,3 \\ \hline 1\,0\,0\,1\,4\,2_5 \\ \hline \end{array}$$

(ب) خمسی نظام میں اعداد کی تفریق:

مثال نمبر 1: 44_5 میں سے 32_5 تفریق کریں۔

$$\begin{array}{r} 4\,4_5 \\ -\ 3\,2_5 \\ \hline 1\,3_5 \\ \hline \end{array}$$

مثال نمبر 2: 4032_5 میں سے 3423_5 تفریق کریں۔

$$\begin{array}{r} 4\,0\,3\,2_5 \\ -\ 3\,4\,2\,3_5 \\ \hline 1\,0\,0\,4_5 \\ \hline \end{array}$$

(ج) خمسی نظام میں اعداد کی ضرب:

خمسی نظام میں ضرب کا جدول

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

مثال نمبر 1: $232_5 \times 34_5$

$$\begin{array}{r} 2\,3\,2 \\ \times\quad 3\,4 \\ \hline 1\,4\,3\,3 \\ 1\,2\,0\,1\,\times \\ \hline 1\,3\,4\,4\,3_5 \\ \hline \end{array}$$

مثال نمبر 2: $120_5 \times 4231_5$

$$4\,2\,3\,1$$

$$
\begin{array}{r}
\times \quad 1\,2\,0 \\
\hline
0\,0\,0\,0 \\
1\,3\,0\,1\,2\,\times \\
4\,2\,3\,1\,\times\,\times \\
\hline
2\,2\,2\,4\,3\,0_5 \\
\hline
\end{array}
$$

مشق نمبر 5

سوال 1: خمسی عددی نظام میں جمع کریں۔

(i) $432_5 + 134_5$ (ii) $3044_5 + 1034_5$

(iii) $43_5 + 14_5$ (iv) $40433_5 + 14154_5$

سوال 2: خمسی عددی نظام میں تفریق کریں۔

(i) $202_5 - 10_5$ (ii) $1203_5 - 134_5$

(iii) $4321_5 - 1234_5$ (iv) $3423_5 - 1234_5$

سوال 3: خمسی عددی نظام میں ضرب کریں۔

(i) $14_5 \times 13_5$ (ii) $143_5 \times 431_5$

(iii) $243_5 \times 334_5$ (iv) $34_5 \times 43_5$

اساس 8 کے عددی نظام میں اعداد ک

اساس 8 کے عددی نظام میں جمع کا جدول

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	2	3	4	5	6	7	10
2	0	3	4	5	6	7	10	11
3	0	4	5	6	7	10	11	12
4	0	5	6	7	10	11	12	13
5	0	6	7	10	11	12	13	14
6	0	7	10	11	12	13	14	15
7	0	10	11	12	13	14	15	16

(الف)اساس 8 کے عددی نظام میں اعداد

مثال نمبر 1: $413_8 + 166_8$

$$
\begin{array}{r}
① \quad\; \\
4\,1\,3_8 \\
+ \quad 1\,6_8 \\
\hline
6\,1\,1_8 \\
\hline
\end{array}
$$

مثال نمبر 2: $64_8 + 175_8$

$$
\begin{array}{r}
①\,① \quad\; \\
1\,7\,5_8 \\
+ \quad 6\,4_8 \\
\hline
2\,6\,1_8 \\
\hline
\end{array}
$$

(ب) اساس 8 کے عددی نظام میں اعداد کی تفریق:

مثال نمبر 1: $603_8 - 245_8$

$6\,0\,3_8$

مثال نمبر 2: $3767_8 - 2777_8$

$3\,7\,6\,7_8$

مثال نمبر 3: $15_8 - 7_8$

$1\,5_8$

$$\begin{array}{r} -\ 2\ 4\ 5_8 \\ \hline 3\ 5\ 6_8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 2\ 7\ 7\ 7_8 \\ \hline 7\ 7\ 0_8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\quad 7_8 \\ \hline 6_8 \\ \hline \end{array}$$

(ج) اساس 8 کے عددی نظام میں اعداد کی ضرب:

مثال نمبر 1: $14_8 \times 45_8$

$$\begin{array}{r} 1\ 4 \\ \times\ \ 4\ 5 \\ \hline 7\ 4 \\ 6\ 0\ \times \\ \hline 6\ 7\ 4_8 \\ \hline \end{array}$$

مثال نمبر 2: $542_8 \times 310_8$

$$\begin{array}{r} 5\ 4\ 2_8 \\ \times\ \ 3\ 1\ 0_8 \\ \hline 0\ 0\ 0\ 0 \\ 5\ 4\ 2\ \times \\ 2\ 0\ 4\ 6\ \times\ \times \\ \hline 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 0_8 \\ \hline \end{array}$$

مثال نمبر 3: $30456_8 \times 3148_8$

$$\begin{array}{r} 3\ 0\ 4\ 5\ 6 \\ \times\ \ 3\ 1\ 0_8 \\ \hline 1\ 4\ 0\ 5\ 0 \\ 3\ 0\ 5\ 6\ \times \\ 7\ 3\ 4\ \times\ \times \\ \hline 1\ 4\ 0\ 2\ 3\ 0_8 \\ \hline \end{array}$$

اساس 8 کے عددی نظام میں ضرب کا جدول

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

مشق نمبر 6

سوال 1: **اساس 8 کے عددی نظام میں جمع کریں۔**

(i) $346_8 + 650_8$ (ii) $5034_8 + 6663_8$

(iii) $5003_8 + 66644_8$ (iv) $60247_8 + 37652_8$

سوال 2: **اساس 8 کے عددی نظام میں تفریق کریں۔**

(i) $53_8 - 36_8$ (ii) $200_8 - 104_8$

(iii) $7601_8 - 6774_8$ (iv) $16373_8 - 8476_8$

سوال 3: **اساس 8 کے عددی نظام میں ضرب کریں۔**

(i) $56_8 \times 36_8$ (ii) $106_8 \times 165_8$

(iii) $3470_8 \times 563_8$ (iv) $30076_8 \times 635_8$

مختلف اساس والے اعداد کی جمع، تفریق اور ضرب

مثال نمبر 1: $10 + 13_5 + 110_2$ کو مختصر کریں اور جواب ثنائی عددی نظام میں لکھیں۔

حل: 13_5 اور 110_2 کو ثنائی نظام میں تبدیل کریں۔

$$\begin{aligned} 13_5 &= 1 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 5 \times 5^0 \\ &= 1 \times 25 + 3 \times 5 + 5 \times 1 \\ &= 25 + 15 + 5 \\ &= 45 \\ 110_2 &= 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= 1 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1 \\ &= 4 + 2 + 0 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &10 + 13_5 + 110_2 \\ &= 10 + 45 + 6 \\ &= 61 \end{aligned}$$

2	61
2	30 – 1
2	15 – 0
2	7 – 1
2	3 – 1
	1 – 1

61 کو ثنائی نظام میں تحویل کریں۔ $61 = 111101_2$

لہٰذا، $10 + 13_5 + 110_2 = 111101_2$

مثال نمبر 2: $125 - 113_5 - 110_2$ کو مختصر کریں اور جواب کو اساس 8 کے عددی نظام میں لکھیں۔

حل: پہلے 113_5 اور 110_2 کو اعشاری نظام میں تحویل کریں۔

$$\begin{aligned} 113_5 &= 1 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 3 \times 5^0 \\ &= 1 \times 25 + 1 \times 5 + 3 \times 1 \\ &= 25 + 5 + 3 \\ &= 33 \\ 110_2 &= 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= 1 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 80 \\ \hline 8 & 10 - 0 \\ \hline & 1 - 2 \end{array}$$

$= 4 + 2 + 0$

$= 6$

$12_5 + 113_5 + 110_2$

$= 125 + 33 + 6$

$= 80$

80 کو اساس 8 کے نظام میں تحویل کریں۔ $80 = 120_8$

لہٰذا، $125 + 113_5 + 110_2 = 120_8$

مثال نمبر 3: $101_2 \times 1001_2$ کو مختصر کریں اور جوام خمسی نظام میں دیں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1_2 \\ \times\ \ 1\,0\,0\,1_2 \\ \hline 1\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,\times \\ 1\,0\,0\,1\,\times\,\times \\ \hline 1\,0\,1\,1\,0\,1_2 \\ \hline \end{array}$$

101101_2 کو اعشاری نظام میں تحویل کریں۔

$$\begin{aligned} 101101_2 &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 1 \times 64 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 \\ &= 64 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 \\ &= 77 \end{aligned}$$

77 کو خمسی عددی نظام میں تحویل کریں۔

$$\begin{array}{r|l} 5 & 77 \\ \hline 5 & 15 - 2 \\ \hline & 3 - 0 \end{array}$$

لہٰذا، $101_2 \times 1001_2 = 302_5$

مشق نمبر 7

سوال 1: **مختصر کریں اور جواب ثنائی عددی نظام میں لکھیں۔**

(i) $31 + 13_5 + 26_8$ (ii) $55 + 21_5 + 1010_2$

(iii) $30 + 32_5 + 111_2$

سوال 2: **مختصر کریں اور جواب خمسی عددی نظام میں لکھیں۔**

(i) $21 - 21_5$ (ii) $71 - 121_5 - 11_2$

(iii) $1000 - 1001_8 - 1001_5$

سوال 3: مختصر کریں اور جواب ثنائی و خمسی عددی نظام میں لکھیں۔

(i) $32 \times 114_5$ (ii) $32 \times 110_5 \times 111_2$

(iii) $95 \times 1101_5 \times 101_8$

یونٹ 4 مالیاتی حساب

حصّہ اوّل: تناسب

مرکب تناسب:(الف)

دو یا دو سے زیادہ تناسب کے درمیان تعلق کو مرکب تناسب کہتے ہیں۔

مرکب تناسب تین صورتوں میں ہوتا ہے۔

صورت 1: دونوں تناسب راست ہوں۔

صورت 2: ایک تناسب راست اور ایک تناسب معکوس ہو۔

صورت 3: دونوں تناسب معکوس ہوں۔

سرگرمی 1:

یہ تناسب مرکب شراکت داری، وراثت کے مسائل حل کرنے میں استعمال ہوتا ہے۔ ذیل کی مثالیں دیکھیں۔

مثال 1: اگر 60 آدمی 5 دِن میں 540 مکعب فٹ زمین کھودتے ہیں تو 80 آدمی 10 دِنوں میں کتنی زمین کھودیں گے؟

حل: (پہلی صورت) یہ تناسب راست ہے۔

آدمیوں میں اضافہ $\Leftarrow$ زمین میں اضافہ (تناسب راست)

دِنوں میں اضافہ $\Leftarrow$ زمین میں اضافہ (تناسب راست)

فرض کریں 80 آدمی 10 دِن میں x مکعب فٹ زمین کھودیں گے۔

کھودی جانے والی زمین مکعب فٹ : دِن : آدمی

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow 60 & : & \uparrow 5 & : & \uparrow 540 \\ 80 & : & 10 & : & x \end{array}$$

$$\frac{x}{540} = \frac{10}{5} \times \frac{80}{60}$$

$$x = \frac{10}{5} \times \frac{80}{60} \times \frac{540}{1}$$

$$x = 2 \times 8 \times 9$$
$$x = 108$$

لہٰذا، 80 آدمی 10 دِن میں 108 مکعب فٹ زمین کھودیں گے۔

مثال 2: اگر ایک ہاسٹل کے 4 کمروں میں 12 دِنوں میں 4000 لیٹر پانی استعمال ہوتا ہے تو 8 کمروں میں 8000 لیٹر پانی کتنے دِنوں کے لیے کافی ہو گا؟

حل: (دوسری صورت) یہ تناسب راست اور تناسب معکوس ہے۔

لیٹروں میں اضافہ ⇐ دِنوں میں اضافہ (تناسب راست)

کمروں میں اضافہ ⇐ دِنوں میں اضافہ (تناسب معکوس)

فرض کریں 8 کمروں کے لیے 8000 لیٹر پانی x دِنوں کے لیے کافی ہو گا۔

دِن	:	کمرے	:	لیٹر
12 ↑	:	4 ↓	:	4000 ↑
x	:	8	:	8000

$$\frac{x}{12} = \frac{8000}{4000} \times \frac{4}{8}$$
$$x = \frac{8000}{4000} \times \frac{4}{8} \times \frac{12}{1}$$
$$x = 12$$

لہٰذا، 8 کمروں کے لیے 8000 لیٹر پانی 12 دِن کے لیے کافی ہو گا۔

مثال 3: اگر 30 آدمیوں کے لیے 1.2 کلوگرام فی آدمی کے حساب سے 20 دِن کے لیے خوراک کافی ہے۔ کتنے آدمی چلے جائیں کہ یہ خوراک 1.5 کلوگرام کے حساب سے 30 دِن کے لیے کافی ہو۔

حل: (تیسری صورت) یہ تناسب معکوس ہے۔

خوراک میں اضافہ⇐ آدمیوں میں کمی (تناسب معکوس)

دِنوں میں اضافہ ⇐ آدمیوں میں کمی (تناسب معکوس)

فرض کریں x آدمیوں کے لیے یہ خوراک 1.5 کلوگرام فی آدمی کے حساب سے 30 دِن کے لیے کافی ہے۔

آدمی : دِن : خوراک فی آدمی

$$\begin{array}{ccccc} 1.2 & : & 20 & : & 30 \\ 1.5 & : & 30 & : & x \end{array}$$

$$\frac{x}{30} = \frac{20}{30} \times \frac{1.2}{1.5}$$

$$x = \frac{20}{30} \times \frac{1.2}{1.5} \times \frac{30}{1}$$

$$x = \frac{20 \times 1.2}{1.5}$$

$$x = \frac{20 \times 12 \times 10}{15 \times 10}$$

$$x = 16$$

لہٰذا، 1.5 کلوگرام فی آدمی کے حساب سے 16 آدمیوں کے لیے یہ خوراک 30 دِن کے لیے کافی ہے۔

مشق نمبر 1

سرگرمی 2:

سوال 1: **10 کلوگرام سامان کو 30 کلومیٹر تک لے جانے کا کرایہ 60 روپے ہو تو 15 کلوگرام کو 10 کلومیٹر تک لے جانے کا کرایہ کیا ہو گا؟**

سوال 2: **2400 آدمیوں کے لیے 1.2 کلوگرام کے حساب سے 20 دِن کی خوراک موجود ہے۔ بتائیں کہ 1 کلوگرام کے حساب سے یہ خوراک کتنے آدمیوں کے لیے 20 دِن تک کافی ہو گی؟**

سوال 3: **100 آدمی 12 دِنوں میں 600 سائیکلیں بناتے ہیں۔ 50 آدمی 24 دِنوں میں کتنی سائیکلیں بنا لیں گے؟**

سوال 4: **32 میٹر لمبے اور 8 میٹر چوڑے قالین کی قیمت 9600 روپے ہے۔ 36 میٹر لمبے اور 16 میٹر چوڑے قالین کی قیمت کیا ہو گی؟**

سوال 5: **6مزدور 100 میٹر لمبے اور 40 میٹر چوڑے فرش کو بنانے میں 8 دِن لگاتے ہیں۔ 8 مزدور 120 میٹر لمبے اور 60 میٹر چوڑے فرش کو کتنے دِنوں میں بنائیں گے؟**

(ب) شراکت داری:

(i) **شراکت داری:** اس کاروبار میں دو یا دو سے زیادہ آدمی نفع و نقصان کی بنیاد پر حصّہ داری کرتے ہیں۔

(ii) **سادہ شراکت داری:** یہ ایسی شراکت داری ہے جس میں حصّہ دار ایک ہی مدت کے لیے سرمایہ کے ساتھ کاروبار شروع یا بند کرتے ہیں۔

(iii) **مرکب شراکت داری:** اس میں شراکت دار مختلف رقوم کو مختلف وقت کے لیے لگاتے ہیں۔ نفع و نقصان بھی سرمایہ اور وقت کی نسبت سے کرتے ہیں۔

سرگرمی 3:

مثال 1: دو دوستوں نے بالترتیب 54000 روپے اور 63000 روپے سے ایک کاروبار شروع کیا۔ ایک سال بعد انھیں 60000 روپے منافع ہوا۔ دونوں کا منافع معلوم کریں۔ (مدت یکساں ہے)

پہلے دوست کا سرمایہ : دوسرے دوست کا سرمایہ

$$54000 : 63000$$
$$54 = 63$$
$$6 = 9$$

نسبتوں کا مجموعہ= $9 + 6 = 15$

کُل منافع = 60000 روپے

پہلے دوست کا منافع= $\frac{6}{15} \times 60000$ = 24000 روپے

دوسرے دوست کا منافع = $\frac{9}{15} \times 60000$ = 36000 روپے

مثال 2: سلیم نے 120000 روپے سے کاروبار شروع کیا۔ 3 ماہ بعد زاہد نے بھی 140000 روپے اس کاروبار میں شامل کئے۔ 6 ماہ بعد آفتاب نے بھی 160000 روپے کاروبار میں لگا دیے۔ سال کے آخر میں 360000 روپے منافع ہوا۔ ہر ایک شراکت دار کا حصّہ معلوم کریں۔

سلیم کا سرمایہ : مدت (ماہ) × سرمایہ

$= 12 \times 120000 = 1440000$

زاہد کا سرمایہ : مدت (ماہ) × سرمایہ

$= 3 \times 120000 = 480000$

آفتاب کا سرمایہ : مدت (ماہ) × سرمایہ

$= 6 \times 120000 = 1960000$

سرمایوں کی نسبت: $12 \times 12 : 4 \times 12 : 8 \times 12$

$12 : 4 : 8$

$3 : 2 : 4$

کُل مجموعہ $= 3 + 2 + 4 = 9$

سلیم کا حصّہ $= 360000 \times \frac{3}{9} = 120000$ روپے

زاہد کا حصّہ $= 360000 \times \frac{2}{9} = 8000$ روپے

آفتاب کا حصّہ $= 360000 \times \frac{4}{9} = 16000$ روپے

(ج) وراثت:

جب انسان اس دُنیا سے چلا جاتا ہے تو جو مال و اسباب وہ چھوڑ جاتا ہے وہ وراثت کہلاتی ہے۔ وہ قانونی وارثوں میں شرعی قانون کے مطابق تقسیم کیا جاتا ہے۔ تقسیم کے دوران ذیل کے مراحل سامنے رکھے جائیں گے۔

مرحلہ 1: سب سے پہلے اس کا قرض ادا کیا جائے گا۔ پھر وصیّت کے مطابق $\frac{1}{3}$ حصّہ دیا جائے گا۔ باقی وراثت کو اس کے ورثا میں یوں تقسیم کیا جائے گا۔

مرحلہ 2: اگر مرنے والے کے والدین زندہ ہیں تو ان کو وراثت کا $\frac{1}{6}$ حصّہ ہر ایک کو ملے گا۔

مرحلہ 3: بیوہ کو $\frac{1}{8}$ حصّہ ملے گا جب کہ شوہر کو $\frac{1}{4}$ حصّہ ملے گا اگر بچے ہوں تو۔

بچے نہ ہونے کی صورت میں بیوہ کو $\frac{1}{4}$ حصّہ ملے گا جب کہ شوہر کو $\frac{1}{2}$ حصّہ ملے گا اور باقی بھائیوں اور بہنوں کو ملے گا۔

مرحلہ 4: ہر بیٹی کو بیٹے سے نصف حصّہ ملے گا۔

سرگرمی 4:

مثال 1: ایک شخص نے اپنی جائیداد میں 1050000 روپے نقد اور 650000 روپے مالیت کا ایک پلاٹ چھوڑا۔ اس کے ورثا میں ایک بیوہ، دو بیٹے اور 3 بیٹیاں ہیں۔ ہر ایک کا حصّہ معلوم کریں۔

حل:

کُل جائیداد = 1050000 + 650000 روپے

کُل جائیداد = 1700000 روپے

بیوہ کا حصّہ $\frac{1}{8}$ = $\frac{1}{8} \times 1700000$ = 212500 روپے

باقی رقم = 212500 – 1700000

= 1487500 روپے

بیٹوں اور بیٹیوں کا حصّہ (ہر بیٹے کا حصّہ بیٹی سے دو گُنا ہو گا۔) فرض کریں کہ بیٹی کا حصّہ 1 ہے تو بیٹے کا حصّہ 2 ہو گا۔

3 بیٹیوں کا حصّہ = $3 \times 1 = 3$

2 بیٹوں کا حصّہ = $2 \times 2 = 4$

کُل حصّے = 7

ہر بیٹی کا حصّہ = $\frac{1}{7} \times 1487500$ = 212500 روپے

ہر بیٹے کا حصّہ = $\frac{2}{7} \times 1487500$ = 425000 روپے

مثال 2: فاطمہ بیگم 500000 روپے کی ملکیت چھوڑ کر فوت ہوئیں۔ ان پر 50000 روپے قرض تھا، 4000 روپے ان کی تدفین پر خرچ ہوا۔ باقی رقم ان کی ماں، شوہر، ایک بیٹی اور ایک بیٹی میں تقسیم کریں۔

حل: کُل رقم جو ورثا میں تقسیم کی جائے گی۔ (تدفین کا خرچ + قرض کی رقم) – کُل رقم

قرض اور تدفین کے خرچ کے بعد باقی رقم = – 500000 (50000 + 4000)

= 54000 – 500000

= 446000 روپے

ماں کا حصّہ $= 446000 \times \frac{1}{6} = 74333$ روپے

شوہر کا حصّہ $= 446000 \times \frac{1}{4} = 111500$ روپے

باقی رقم $= 446000 - (74333 + 111500)$

$= 446000 - 185833$

$= 260167$ روپے

بیٹی کا حصّہ $= 1$ ؛ بیٹے کا حصّہ $= 2$

کُل حصّے $= 3$

بیٹی کا حصّہ $= 260167 \times \frac{1}{3} = 86722.33$ روپے

بیٹے کا حصّہ $= 260167 \times \frac{2}{3} = 173444.66$ روپے

مشق نمبر 2

سرگرمی 5:

سوال 1: وسیم اور عارف نے مل کر ایک شراکتی کاروبار شروع کیا۔ وسیم نے 100000 روپے اور عارف نے 150000 روپے ملائے۔ ایک سال کے بعد انھیں 300000 روپے منافع ہوا۔ ہر ایک کا حصّہ معلوم کریں۔

سوال 2: اعجاز نے 60000 روپے سے ایک کاروبار شروع کیا۔ 3 ماہ بعد ریاض نے بھی 100000 روپے ملا کر شرکت کر لی۔ سال میں انھیں کُل 200000 روپے منافع ہوا تو ہر ایک کا حصّہ بتائیں۔

سوال 3: دو خواتین سلمیٰ اور شہناز نے 100000 روپے اور 150000 روپے کی شراکت سے ایک ریسٹورنٹ کھولا۔ سال میں انھیں 300000 روپے منافع ہوا۔ ہر ایک کا حصّہ معلوم کریں۔

سوال 4: علی اور سعد نے 200000 روپے اور 300000 روپے ملا کر ایک کاروبار شروع کیا۔ 3 ماہ بعد احمد رضا نے 250000 روپے ملا کر شراکت کی۔ سال کے آخر میں کُل 550000 روپے منافع ہوا تو ہر ایک حصّہ دار کو کتنے پیسے ملیں گے؟

سوال 5: دو ساتھیوں غلام سرور اور علی بخش نے بالترتیب 260000 روپے اور 520000 روپے ملا کر ایک کاروبار شروع کیا۔ 6 ماہ بعد علی بخش نے اپنی شراکت ختم کر لی۔ سال کے آخر میں کُل 400000 روپے منافع ہوا۔ منافع میں سے ہر ایک کا حصّہ بتائیں۔

حصّہ دوم: بینکنگ کا نظام

(الف) بینکنگ کی خدمات و سہولیات:

حکومت نے بینک لوگوں کی رقوم کے لین دین کے لیے قائم کیا ہے۔

بینک: اکاؤنٹ ہولڈر کی رقوم اپنے پاس جمع کرتا ہے اور اس پر رقم وصول کرتا ہے۔ ان کو قرضہ فراہم کرتا ہے۔ اس کے بدلے فائدہ یا منافع دیتا ہے اور قرض پر مارک آپ وصول کرتا ہے۔

<table>
<tr><td rowspan="4">ڈیپازٹ کی اقسام</td><td>PLS بچت اکاؤنٹ</td></tr>
<tr><td>کرنٹ ڈیپازٹ اکاؤنٹ</td></tr>
<tr><td>PLS منجمد (Fixed) ڈیپازٹ اکاؤنٹ</td></tr>
<tr><td>فارن کرنسی اکاؤنٹ</td></tr>
<tr><td rowspan="3">بینک سے لین دین کے طریقے</td><td>چیک: لکھا ہوا آرڈر، رقم نکالنے کے لیے</td></tr>
<tr><td>ڈیمانڈ ڈرافٹ: ڈرافٹ کسی دوسرے بینک میں رقم بھیجنے کا تحریری حکم نامہ</td></tr>
<tr><td>پے آرڈر: لکھا ہوا آرڈر کسی پارٹی کو رقم منتقل کرنے کے لیے</td></tr>
<tr><td rowspan="3">آن لائن بینکنگ: بِلوں کی ادائیگی، کسی بھی وقت رقم نکلوانا یا منتقل کرنا (بذریعہ انٹرنیٹ و کمپیوٹر)</td><td>ATM: رقم کی وصولی آٹو ٹیلر مشین سے کارڈ استعمال کر کے رقم نکالنا</td></tr>
<tr><td>ڈیبٹ کارڈ: یہ کسی بھی وقت رقم نکالنے یا اشیا خریدتے وقت استعمال ہو سکتا ہے</td></tr>
<tr><td>کریڈٹ کارڈ: کارڈ خریداری کی قیمت ادا کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے</td></tr>
</table>

(ب) کرنسی کو تحویل کرنا:

بینک کرنسی کی تحویل کی سہولت بھی فراہم کرتے ہیں۔ ذیل میں ٹیبل کسی بھی ملک کی موجودہ وقت میں کرنسی کی تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتی

ہے۔ اسٹیٹ بینک روزانہ اس شرح کا اعلان کرتا ہے۔

نمبر شمار	ملک	کرنسی کا نام/علامت	قیمتِ خرید (پاکستانی روپے)	قیمتِ فروخت (پاکستانی روپے)
1	ریاست ہائے متحدہ امریکہ	ڈالر $	277.85	280.8
2	برطانیہ	پاؤنڈ £	349.35	352.28
3	بھارت	روپیہ ₹	3.33	3.44
4	یورپین یونین	یورو €	293.5	297.2
5	چین	یان ¥	38.38	38.78
6	جاپان	ین ¥	1.9	1.98
7	سعودی عرب	ریال ﷼	73.06	73.85

مثال 1: ایک پاکستانی 150 ڈالر خریدنا چاہتا ہے۔ اس کو کتنے پاکستانی روپے دینے ہوں گے؟

حل: ایک امریکی ڈالر = 162.5 روپے

150 امریکی ڈالر = 150×162.57 = 24385.50 روپے

مثال 2: 31270 روپے کے بدلے کتنے چینی یوان ملیں گے؟

حل: ایک چینی یوان = 31.27 روپے

31270 روپے = $\frac{31270}{31.27}$ = 100 ین

مثال 3: 150 سعودی ریال کتنے روپے کے ملیں گے؟

حل: ایک سعودی ریال = 55 روپے

150 سعودی ریال = 55×150 = 8250 روپے

سرگرمی3: دی گئی پاکستانی کرنسی کو بین القوامی کرنسی میں تبدیل کرکے دئے گئے جدول کو مکمل کریں۔

روپیا	پاؤنڈ	ڈالر	ین	ریال
10,000				

				25,000

مشق نمبر 1

سوال 1: **62540 روپے کو چینی یان میں تبدیل کریں۔**

سوال 2: **$308 انگریزی ڈالر کو پاکستانی روپوں میں تحویل کریں۔**

سوال 3: **600 جاپانی ین کتنے روپے کے ملیں گے؟**

سوال 4: **ایک پاکستانی سعودی عرب میں کام کرتا ہے۔ اسے ماہانہ 8000 ریال تنخواہ ملتی ہے۔ بتائیے! پاکستانی کرنسی میں وہ کتنی رقم ہوئی؟**

سوال 5: **48000 پاکستانی روپوں کو اِنڈین روپوں میں تحویل کریں۔**

حصّہ سوم: منافع، مارک اَپ، اصل منافع، شرح اور مدت

(الف) نفع / مارک اَپ (I):

ذیل کی مثالیں دیکھیں۔

مثال 1: اکرم نے بینک سے 50000 روپے 7% شرح کے حساب سے 2 سال کے لیے حاصل کیے۔ مارک اَپ کی رقم اور کُل ادا کردہ رقم معلوم کریں۔

I = P × R × T
نفع یا مارک آپ = اصل رقم × شرح × مدت

حل: یہاں

اصل رقم (P) = 50000 روپے

شرح (R) = 7%

وقت/مدت (T) = 2 سال

مارک اَپ (I) = $P \times R \times T$

$$= 50000 \times \frac{7}{100} \times 2$$

مارک اَپ (I) = 7000 روپے

لہٰذا کُل اُدھار لی گئی رقم $= 50000 + 7000$

$=$ 57000 روپے

(ب) اصل رقم (P) معلوم کرنا:

مثال 2: غفور نے کاروبار میں کچھ رقم 3 سال کے لیے 10% سالانہ کے حساب سے لگائی۔ اسے 30000 روپے فائدہ ہوا۔ اصل رقم معلوم کریں

$$\boxed{\begin{array}{c} I = P \times R \times T \\ P = \dfrac{I}{R \times T} \end{array}}$$

حل: اصل رقم (P) $=$ ؟

شرح (R) $=$ 10%

وقت/مدت (T) $=$ 3 سال

مارک آپ (I) $=$ 30000 روپے

لہٰذا فارمولا کے تحت اصل رقم (P) $= \dfrac{00003}{\frac{01}{001}\times 3}$

$= \dfrac{30000\times 100}{3\times 10} =$ 100000 روپے

لہٰذا غفور نے 100000 روپے لگائے۔

(ج) نفع یا مارک آپ (R) معلوم کرنا:

مثال 3: مارک آپ کی شرح معلوم کریں اگر 30000 روپے 5 سال میں 52000 روپے ہو جائیں۔

$$\boxed{\begin{array}{c} I = P \times R \times T \\ R = \dfrac{I}{P \times T} \end{array}}$$

حل: مارک آپ (I) $=$ (کُل رقم – اصل رقم)

$= 52000 - 30000$

$=$ 12000 روپے

یہاں اصل رقم (P) $=$ 30000 روپے

شرح (R) $=$ ؟

وقت/مدت (T) $=$ 5 سال

لہٰذا فارمولا کے تحت شرح (R) $= \dfrac{12000 \times 100}{30000 \times 5} = 8\%$

لہٰذا مارک آپ کی شرح 8% ہے۔

(د) مدت (T) معلوم کرنا:

مثال 4: 20000 روپے بینک میں جمع کروانے سے 12% مارک آپ سالانہ شرح کے حساب سے کتنے عرصہ میں 35000 روپے ہو جائیں گے؟

$$I = P \times R \times T$$
$$T = \frac{I}{P \times R}$$

حل: یہاں مارک آپ (I) = (اصل رقم – کُل رقم)

= 35000 – 20000

= 15000 روپے

اصل رقم (P) = 20000 روپے

شرح (R) = 12%

وقت/مدت (T) = ؟

لہٰذا فارمولا کے تحت مدت/وقت (T) = $\frac{15000 \times 100}{20000 \times 12} = \frac{75}{12}$

= 6.25 سال (یعنی 6 سال 3 ماہ)

لہٰذا 20000 روپے 6 سال اور 3 ماہ میں 35000 روپے ہو جائیں گے۔

مشق نمبر 2

سوال 1: 40000 روپے پر 5 فی صد سالانہ سے 4 سال کے لیے منافع معلوم کریں۔

سوال 2: ریاض نے 6 فی صد سالانہ پر 4 سال کے لیے بینک سے 30000 روپے قرض لیا۔ مارک آپ معلوم کریں۔

سوال 3: نسیم نے 10% سالانہ سے 4 سال میں 40000 روپے منافع حاصل کیا تو اس کی اصل رقم بتائیں۔

سوال 4: کس شرح سالانہ پر 11 سال میں 68000 منافع 90440 روپے ہو گا۔

سوال 5: کتنی مدت کے لیے 6 فی صد سالانہ سے 31000 روپے پر منافع 5332 روپے حاصل ہو گا؟

سوال 6: کتنی مدت میں 6% سالانہ کے حساب سے رقم 21000 روپے سے 31500 روپے ہو جائے گی؟

حصّہ چہارم: نفع و نقصان فی صد، ڈسکاؤنٹ فی صد، مسلسل لین دین

(الف) نفع و نقصان فیصد

$$\text{فی صد نفع} = \frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$$

نفع = قیمت فروخت – قیمت خرید

نقصان = قیمت خرید – قیمت فروخت

مثال 1: قیمت خرید 1000 روپے ہے اور نفع 250 روپے ہ... کریں۔

حل:

$$\text{فی صد نفع} = \frac{\text{نفع}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$$

$$= \frac{100 \times 250}{1000}$$

$$\text{فی صد نفع} = 25\%$$

مثال 2: اگر قیمت خرید 2500 روپے ہو اور نقصان 250 روپے ہو تو شرح نقصان کیا ہو گا؟

حل:

$$\text{فی صد نقصان} = \frac{\text{نقصان}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$$

$$= \frac{100 \times 250}{2500}$$

$$\text{فی صد نقصان} = 10\%$$

(ب) ڈسکاؤنٹ:

فارمولا: درج شدہ قیمت= MP ؛ قیمت

فروخت = SP

مثال 3: ایک چیز کی درج شدہ قیمت 3000 روپے تھے۔ اسے 2700 روپے میں فروخت کیا گیا تو فی صد ڈسکاؤنٹ معلوم کریں۔

حل:

MP = 3000 روپے

SP = 2700 روپے

$$\text{ڈسکاؤنٹ} = 3000 - 2700$$

= 300 روپے

$$\text{فی صد ڈسکاؤنٹ} = \frac{\text{ڈسکاؤنٹ}}{MP} \times 100$$

$$= \frac{300}{3000} \times 100$$

$$\text{فی صد ڈسکاؤنٹ} = 10\%$$

فی صد ڈسکاؤنٹ $= \frac{\text{ڈسکاؤنٹ}}{MP} \times 100$

مثال 4: قیمت فروخت 2000 روپے، ڈسکاؤنٹ 300 روپے۔

حل:

درج شدہ قیمت = 2000 روپے

ڈسکاؤنٹ = 300 روپے

$$\text{فی صد ڈسکاؤنٹ} = \frac{\text{ڈسکاؤنٹ}}{MP} \times 100$$

$$= \frac{300}{2000} \times 100$$

فی صد ڈسکاؤنٹ = 15%

(ج) مسلسل لین دین:

درج شدہ قیمت میں سے ایک کے بعد ایک ڈسکاؤنٹ (رعایت) دی جائے، نفی کی جائے تو یہ مسلسل یا پے در پے ڈسکاؤنٹ کہلاتا ہے۔

نوٹ: ڈسکاؤنٹ کی شرح ایک جیسی بھی ہو سکتی ہے اور مختلف بھی۔

مثال 5: ایک ٹی وی سیٹ کی قیمت فروخت معلوم کریں۔ اگر اس کی درج شدہ قیمت 70000 روپے ہو اور ڈسکاؤنٹ کی شرح 7 فی صد اور 3 فی صد ہو۔

حل: درج شدہ قیمت = 70000 روپے

پہلا ڈسکاؤنٹ = $\frac{7}{100} \times 70000$

= 4900 روپے

قیمت فروخت = درج شدہ قیمت – پہلا ڈسکاؤنٹ

= $70000 - 4900$

= 65100 روپے

دوسرا ڈسکاؤنٹ = $\frac{3}{100} \times 65100$

= 1935 روپے

دوسری قیمت = $65100 - 1935$

= 63165 روپے

مثال 6: اسد نے ایک گھر 835000 روپے میں خریدا۔ پھر اسے 634000 روپے میں فروخت کیا تو فی صد نقصان معلوم کریں۔

حل: قیمت خرید = 835000 روپے

قیمت فروخت = 634000 روپے

نقصان = $835000 - 634000$

= 200400 روپے

$$\text{فی صد نقصان} = \frac{\text{نقصان}}{\text{قیمت خرید}} \times 100$$

$$= \frac{200400}{835000} \times 100$$

$$= \frac{200400}{835}$$

$$= 24\%$$

پس، نقصان 24 فی صد ہے۔

مثال 7: ایک چیز کی درج شدہ قیمت 1600 روپے ہے۔ ڈسکاؤنٹ کے بعد وہ چیز 1504 روپے میں فروخت ہوئی۔ فی صد ڈسکاؤنٹ معلوم کریں۔

حل:

$$\text{ڈسکاؤنٹ} = \text{قیمت خرید} - \text{قیمت فروخت}$$

$$= 1600 - 1504$$

$$= 96 \text{ روپے}$$

$$\text{فی صد ڈسکاؤنٹ} = \frac{\text{ڈسکاؤنٹ}}{MP} \times 100$$

$$= \frac{96}{1600} \times 100$$

$$= 6\%$$

پس، ڈسکاؤنٹ 6 فی صد ہے۔

مشق نمبر 3

سوال 1: **ایک چیز 1050 روپے میں خرید کر 1155 روپے میں فروخت کی گئی۔ فی صد نفع معلوم کریں۔**

سوال 2: **جلیل نے 4 کاریں 90000 روپے میں خریدیں اور انھیں 100500 روپے میں فروخت کیا۔ اس کا فی صد نفع یا نقصان معلوم کریں۔**

سوال 3: **ایک سائیکل کی درج شدہ قیمت 9000 روپے تھی۔ ہول سیلز نے ریٹیلر کو 10 فی صد اور 5 فی صد ڈسکاؤنٹ دیا۔ سائیکل کی قیمت فروخت معلوم کریں۔**

سوال 4: ایک میز کی اصل قیمت 6000 روپے تھی۔ اسے دکاندار نے 15 فی صد منافع پر بیچا۔ خریدنے والے نے اسے مزید 10 فی صد منافع پر بیچا۔ آخری قیمت فروخت معلوم کریں۔

سوال 5: کمال نے کچھ چیزیں خریدیں جن کی درج شدہ قیمت 6000 روپے تھی۔ اگر ان اشیا پر 15% ڈسکاؤنٹ دیا گیا تو ان اشیا کی قیمت فروخت معلوم کریں۔

یونٹ 5 کثیر رقمی اظہاریے

حصّہ اوّل: الجبری اظہاریے

پچھلی کلاس میں، آپ نے سیکھا کہ الجبرا ریاضی کی ایک شاخ ہے جو علامتوں، متغیرات، اعداد اور اظہار سے متعلق ہے۔جیسا کہ آپ کو پتا ہےکہ ریاضی کہ اظہار اور مساوات بنا کر ہم نامعلوم کو تلاش کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں۔ درج ذیل اظہار پر غور کریں: $2x + 3p = 10y$ ۔ آپ جانتے ہیں کہ یہاں x، p، اور y متغیرات، یا نامعلوم اعداد کی نمائندگی کرتے ہیں۔ 2، 3، اور 10 اعداد ہیں،جو کہ عددی سرے کہلاتے ہیں۔اس اظہار میں تین اصطلاحات ہیں: $2x$، $3p$، اور 10y، اور وہ اصطلاحات کے برعکس ہیں۔

الجبری اظہاریے میں متغیرات ہیں

$$2x + 3p - 10y$$

سرگرمی 1:

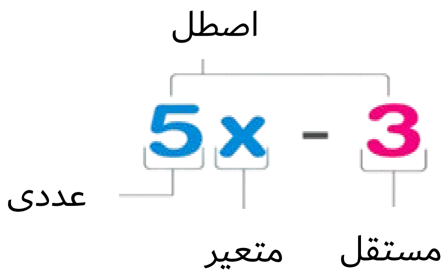
اپنے پچھلے تجربات کو یاد کریں، اور درج ذیل سوالات کا جواب دیں:

متغیر کیا ہے؟ ایک مستقل کیا ہے؟ ایک جیسے الجبری اصطلاحات اور مختلف الجبری اصطلاحات کیا ہیں؟ الجبری اظہار کیا ہے؟

ایک متغیر ہمیشہ ایک عدد کی نمائندگی کرتا ہے، لیکن جب اظہار میں لکھا جاتا ہے تو اس کے مختلف قیمتیں ہوتی ہیں۔ ایک مستقل ایک قدر یا عدد ہے جو اظہار میں کبھی نہیں بدلتا ہے۔ یہ مسلسل ایک ہی ہے۔

الجبری اظہار : متغیرات، اعداد، اور کم از کم ایک ریاضی کے عمل (جمع، تفریق ، ضرب، یا تقسیم) کا مجموعے ہیں۔ مثال کے طور پر، پہلے، آپ نے سیکھا کہ $5x+7$ ایک الجبری اظہار ہے۔ اس اظہار میں، x ایک متغیر ہے، جو ایک نامعلوم نمبر کی نمائندگی کرتا ہے۔ دوسری طرف، 7 ایک مقررہ عددی قدر کی نمائندگی کرتا ہے، جسے مستقل کہا جاتا ہے۔ وہ عدد جو متغیر کو ضرب دے رہا ہے 5 ہے۔ اس نمبر کو عددی سرا کہا جاتا ہے۔ اس الجبری اظہار میں دو اصطلاحات ہیں، $5x$ اور 7

اسی طرح،$5x-3$ اظہار میں دو اصطلاحات ہیں جس میں x کی قدر ہمیں معلوم نہیں ہے اور اس کی کوئی بھی قیمت ہوسکتی ہے۔ پورا اظہار دو اصطلاحات والی کثیر رقمی کے طور پر جانا جاتا ہے، کیونکہ اس میں دو اصطلاحات ہیں۔



کثیررقمی:یہ ا لجبری اظہار ہیں جو متغیرات اور عددی سِرے پر مشتمل ہوتے ہیں۔ لفظ کثیر الثانی "پولی نومل" یونانی الفاظ 'پولی' سے ماخوذ ہے جس کا مطلب ہے 'کئی' اور 'نومل' کی ہے معنی ہے 'اصطلاحات '، اس لیے مجموعی طور پر کہا گیا ہے کہ "بہت سی اصطلاحات"والی رقوم ۔ ایک کثیر رقمی میں اصطلاحات کی کوئی بھی تعداد ہو سکتی ہے لیکن لامحدود نہیں ہوسکتی ہے۔ مثال کے طور پر، x^2+x-12ایک متغیر والی کثیر رقمی کی ایک مثال ہے۔

عددی سر	درجہ	متغیر (ے)	مثال
1	x^2 میں 2درجہ ہے۔ x میں 1درجہ ہے۔	x	$x^2 + x - 12$
4 اور 2	x^3میں3 درجہ ہے۔ y میں 1درجہ ہے۔	x، y	$4x^3 - 2y + 1$
2، 4 اور 1	x^2میں 2درجہ ہے۔ y^3میں 3درجہ ہے۔ z میں 1 درجہ ہے۔	x، y، z	$2x^2 + 4y^3 + z$

کثیر رقمی کا درجہ

ہم ایک متغیر والی کثیر الثانی کے ساتھ شروع کریں گے۔ ایک متغیر میں کثیر الجبری اصلاحات ہیں جو کہ ax^n کی شکل میں اصطلاحات پر مشتمل ہوتے ہیں۔

جہاں a ایک حقیقی نمبر ہے اور اسے متغیر کا عددی سرا کہا جاتا ہے، x ایک متغیر ہے اور n متغیر کا درجہ دکھاتا ہے۔ ایک متغیر میں کثیر الثانی کا درجہ کثیر میں سب سے بڑا درجہ ہے۔ مثال کے طور پر، کثیر رقمی $x^2 + x - 12$ میں، کثیر الثانی کی درجہ 2 ہے کیونکہ اس مثال میں، متغیر x کی سب سے زیادہ طاقت 2 ہے۔ لہذا، اس کثیر الثانی کی درجہ 2 ہے۔

مثال 1، آئیے تجزیہ کرتے ہیں۔ $6x^4 + 2x^3 + 3$ ، ایک کثیر الجہتی۔

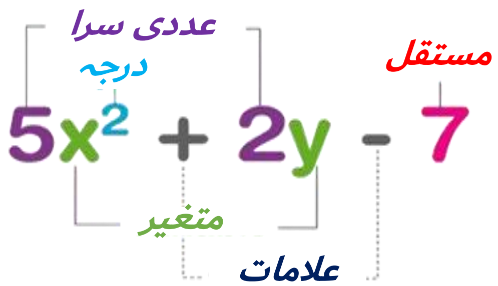
مستقل	عددی سِرا	درجہ	متغیر (ے)	مثال
3	2 ،6	x^4میں4 درجہ ہے۔ x^3میں3 درجہ ہے۔	x	$6x^4 + 2x^3 + 3$

جیسا کہ آپ جانتے ہیں، کثیر کا درجہ کثیر میں متغیر کی سب سے زیادہ طاقت ہے۔ . اس مثال میں، متغیر x میں سب سے زیادہ قوت 4 ہے، لہذا، اس کثیر الثانی کا درجہ 4 ہے۔

سرگرمی 2:

کثیر الجہتی $3x^8 + 4x^3 + 9x + 1$ کی ڈگری 8 ہے۔ کیوں؟ اپنے پاس بیٹھے ساتھی سے وجہ پر بات کریں۔ اس کثیر رقمی کا عددی سرا تلاش کریں۔

سرگرمی 3:



- اس کثیر رقمی میں متغیرات کیا ہیں؟
- اس کثیر رقمی کے عددی سرے کیا ہیں؟
- x کا درجہ کیا ہے؟
- y کا درجہ کیا ہے؟
- اس کثیر رقمی $5x^2 + 2y - 7$ کا درجہ کیا ہے؟

اس کہ درجے کے ساتھ کثیر رقمی کی کچھ مثالیں یہ ہیں:

مستقل	کثیر رقمی کہ عددی سرے	کثیر رقمی کا درجہ	کثیر رقمی
3	5، 1 اور 2	4	$5x^4 + x^2 - 2x + 3$
2	12 اور 5	3	$12x^3 - 5x^2 + 2$
12	4	1	$4x + 12$
6	0	0	$6\,(0x^2 + 0x + 6)$

کثیر رقمی کا درجہ تلاش کرنا

آپ نے پچھلی کلاس میں الجبری اظہار کی اصطلاحات کے بارے میں سیکھا ہے۔ کثیر رقمی کی اصطلاحات اس کے حصے ہوتے ہیں جو عام طور پر "+" یا "–" علامات سے الگ ہوتے ہیں۔ لہذا، ایک مساوات میں کثیر الجہتی کا ہر حصہ ایک اصطلاح ہے۔ مثال کے طور پر، اس کثیر رقمی میں $2x^2 + 5x + 4$ اصطلاحات کی تعداد 3 ہوگی۔

کثیر الثانی کا درجہ معلوم کرنے کے لیے آسان اقدامات ہیں جو درج ذیل ہیں:

مثال 1: کثیر رقمی $4x^5 + 8x^3 + 3x^5 + 3x^2 + 4 + 2x + 3$ پر غور کریں

مرحلہ نمبر 1: تمام مشابہ اصطلاحات والی متغیرات کو یکجا کریں۔

$$(4x^5 + 3x^5) + 8x^3 + 3x^2 + 2x + (4 + 3)$$

مرحلہ 2: تمام مستقلوں کو نظر انداز کریں اور صرف متغیرات کو ان کی طاقتوں کے ساتھ لکھیں۔

$$x^5 + x^3 + x^2 + x + x^0$$

مرحلہ 3:متغیر کو ان کے اختیارات کے نزولی ترتیب میں ترتیب دیں اگر وہ مناسب ترتیب میں نہیں ہیں۔

$$x^5 + x^3 + x^2 + x^1 + x^0$$

مرحلہ 4:چیک کریں کہ متغیر کی سب سے بڑی طاقت کون سی ہے اور وہ کثیر الثانی کا درجہ ہے۔

$$x^5 + x^3 + x^2 + x + x^0$$

اس کثیر الثانی میں سب سے بڑی قوت 5 ہے۔

مثال 2:

درج ذیل کثیر کی نام ڈگری نامی کیا ہے؟

(i) $5x^4 + 2x^3 + 3x + 4$

جواب:درجہ 4 ہے

(ii) $11x^9 + 10x^5 + 11$

جواب:درجہ 9 ہے۔

اب کثیر رقمی اصطلاح پر غور کریں۔ مثال کے طور پر، x^2y^5 ایک الجبری اصطلاح ہے۔ جس میں x کا درجہ 2 ہے، اور y کا درجہ 5 ہے۔ دونوں اصطلاحوں کا درجہ $2 + 5$ ہے، جو کہ 7 کے برابر ہے۔ لہٰذا، اگر a اور b ایک اصطلاح میں متعدد متغیرات کا درجہ ہیں، تو کثیر رقمی اظہار میں کسی اصطلاح کے درجہ کو $a + b$ کے طور پر دیا جاتا ہے

مثال 3:

آئیے دو متغیرات کے ساتھ ایک کثیر رقمی کو دیکھیں: $-7x^2y - 3xy^3 + 2x$

اس کثیر رقمی کی تین اصطلاحات ہیں، $7x^2y$، $3xy^3$، $2x$ اور دو متغیر، x، y۔ ہیں ۔

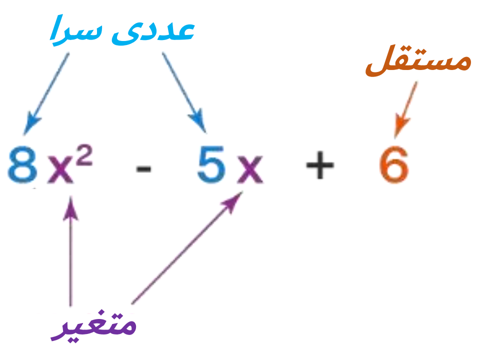
کسی اصطلاح کا درجہ کا تعین کرنے کے لیے، آپ اصطلاح میں تمام متغیرات کے درجے کا مجموعہ تلاش کرتے ہیں۔

کثیر رقمی	درجوں کا مجموعہ	ڈگری / درجہ
$7x^2y$ سال	$2 + 1 = 3$	3
$3xy^3$	$1 + 3 = 4$	4
2x	$1 = 1$	1

اصطلاح کا سب سے زیادہ درجہ کثیر کا درجہ تعین کرے گا۔ اس لیے اس کثیر رقمی کا درجہ ،

$4 - 7x^2y$ ،$3xy^3 + 2x$ ہے۔

آپ نے پہلے سیکھا ہے کہ ایک کثیر الجبری اظہار ایک رقمی ہے۔ جو متغیرات اور اعداد پر مشتمل ہوتی ہیں، جن میں متغیرات کے ساتھ جمع ، تفریق ضرب، اور تقسیم عوامل شامل ہوتے ہیں۔ لہذا، کثیر الثانیات میں ایک یا زیادہ متغیرات ہوسکتے ہیں۔ مثال کے طور پر، ایک کثیر رقمی $8x^2 + 5x + 6$ میں ایک متغیر x ہے ۔ اس کثیر رقمی کا درجہ دو ہے۔



ایک متغیر میں کثیر رقمی وہ اظہار ہیں جس میں صرف ایک متغیر موجود ہے۔

ایک متغیر کے ساتھ کثیر رقمیوں کی کچھ اور مثالیں ذیل میں دی گئی ہیں۔

ایک متغیر کے ساتھ کثیر رقمی					
مسلسل	عددی سر	رقموں کی تعداد	درجہ/ ڈگری	متغیر	مثال
2	1 اور 3	3	2	x	$x^2 + 3x - 2$
1	3، 2 اور 1	4	3	y	$3y^3 + 2y^2 - y + 1$
3	1، 5 اور 8	4	4	m	$\mathrm{m}^4 - 5\mathrm{m}^2 + 8\mathrm{m} - 3$

کثیر رقمیوں کو ان کی ڈگری کی بنیاد پر درجہ بندی کیا جا سکتا ہے۔ کثیر رقمیوں کی ڈگری کی بنیاد پر، ان کا نام دیا جاتا ہے اور اس کا اظہار اس طرح کیا جاتا ہے:

- ایک کثیر رقمی جس کی سب سے زیادہ ڈگری صفر ہوتی ہے اسے مستقل کثیر رقمی کہا جاتا ہے۔ اس کا کوئی متغیر نہیں ہے، صرف مستقل ہے۔ 6 کو مستقل اور/یا صفر کثیر رقمی کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے کیونکہ اس کی ڈگری صفر ہے۔مستقل کثیر کو صفر کثیر رقمی کہا جاتا ہے۔

- ایک کثیر جس کا درجہ 1ہوتا ہے اسےا یک درجہ والی کثیر رقمی کہا جاتا ہے۔ 4x + 12 یہ ایک درجہ والی کثیر رقمی کی ایک مثال ہے کیونکہ اس کی ڈگری ایک ہے۔ عام طور پر، ax + b، a ≠ 0، ایک لکیری کثیر رقمی ہے۔

- ایک کثیر رقمی جس کا درجہ 2 ہو اسے دو درجہ والی کثیر رقمی کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر، $2x^2 + 3x + 15$ ایک دو درجہ والی رقمی کثیر کی ایک مثال ہے۔ عام طور پر، $ax^2 + bx + c، a \neq 0$ ، ایک دو درجہ والی کثیر رقمی ہے۔

- ایک کثیر رقمی جس کا سب سے زیادہ درجہ 3 ہےاسے تین درجی والی کثیر رقمی کہا جاتا ہے۔

$12x^3 + 5x^2 + 2$ ؛ $8x^3 + 2x^2 + 3x + 15$; اور $y^3 + 4y + 11$ تین درجہ والی کثیر رقمی کی مثالیں ہیں۔ عام طور پر، $ax^3 + bx^2 + cx + d، a \neq 0$، ایک تین درجہ والی کثیر رقمی ہے۔

- ایک کثیر رقمی جس کا سب سے زیادہ درجہ 4 ہو اسے چار درجہ والی کثیر رقمی کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر

$10x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 3x + 15$ چار درجہ والی کثیر رقمی ہیں۔ عام طور پر،

$ax^4 + bx^2 + cx^2 + dx + e، a \neq 0$، چار درجہ والی کثیر رقمی ہے۔

کچھ اور مثال

کثیر رقمی	مثال	درجہ	عددی سر
مستقل یا صفر کثیر رقمی	3	0	0
یک درجہ والی کثیر رقمی	$3x + 1$	1	3
دو درجہ والی کثیر رقمی	$4x^2 + 1x + 1$	2	4 اور 1
تین درجہ والی کثیر رقمی	$6x^3 + 4x^2 + 3x + 1$	3	6، 4، اور 3
چہار درجہ والی کثیر رقمی	$6x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1$	4	6، 3،3، اور 2

اس میں موجود اصطلاحات کی تعداد کی بنیاد پر کثیر ناموں کی درجہ بندی کی جا سکتی ہے۔

ایک رقمی

ایک الجبری اظہارمیں صرف ایک اصطلاح ہوتی ہے۔ اظہار کی چند مثالیں یہ ہیں:

- $5x$
- 3
- $6a^4$
- $-3xy$

دو رقمی

ایک دو رقمی دو اصطلاحات پر مشتمل ہے۔ دو رقمی الجبری اظہارکی چند مثالیں ہیں:

- $5x + 3$
- $6a^4 + 17x$
- $xy^2 + xy$

تین رقمی

یہ تین اصطلاحات پر مشتمل ہوتی ہے۔ تین رقمی الجبری اظہار کی چند مثالیں یہ ہیں:

- $8a^4 + 2x + 7$
- $4x^2 + 9x + 7$
- $x^3 - 2x^2 + 4$
- $xy^2 + xy + 2$

ایک رقمی الجبری اظہار	دو رقمی الجبری اظہار	تین رقمی الجبری اظہار
ایک اصطلاح	دو اصطلاح	تین اصطلاح
مثال: $x, 3y, 29, \frac{x}{2}$	**مثال:** $x^2 + x$, $x^3 - 2x$, $y + 2$	**مثال:** $x^2 + 2x + 20$

دو متغیرات کے ساتھ کثیر رقمی کی ایک مثال

$4x^3y + 2xy^2 + x + 7$ ایک کثیر رقمی ہے جس میں دو متغیرات، x اور y، ہیں اور اس کثیر رقمی کی ڈگری 4 ہے، کیونکہ ڈگری کا تعین کرنے کے لیے، آپ کو اس کا مجموعہ ملتا ہے۔ اس لئے اصطلاح میں تمام متغیرات کے درجوں کا سب سے زیادہ مجموعہ ایک کثیر رقمی کے درجے کو ظاہر کرتا ہے۔ اس مفہوم میں چار اصطلاحات ہیں۔

$4x^3y - 2xy^2 + x - 7$	
درجہ	**اصطلاحات**
$3 + 1 = 4$	$4x^3y$
$1 + 2 = 3$	$2xy^2$
1	X
0	7

ایک یا متعدد متغیرات کے ساتھ کثیر رقمی کی کچھ مثالیں ذیل میں دی گئی ہیں۔

کثیر رقمی					
مستقل	**عددی سر**	**اصطلاحات کی تعدا د**	**درجہ**	**متغیر**	**مثال**
2	1 اور 3	3	2	x	$x^2 + 3x - 2$
1	3، 2 اور 1	4	3	y	$3y^3 + 2y^2 - y + 1$
3	1، 5 اور 8	4	4	m	$m^4 - 5m^2 + 8m - 3$
1	2، 3، 4	4	3	x، y	$2x^3 + 3y^2 + 4xy + 1$

$x^2y^2 + xy^3 + y^4 - 8xy$	x، y	4	4	8،1	0

مشق1

درجے اور اصطلاحات کی تعداد کی بنیاد پر دیے گئے کثیر رقمیوں کو ان کی قسم کے مطابق درجہ بندی کریں۔

$\mathbf{7x;\ 3x - 1;\ 2x^2 - x + 3;\ x^3 - 2x + 5;\ 6xy - 20y^6;\ x^3 + 4x^2 + 1}$

تین رقمی	دو رقمی	ایک رقمی	الجبری اظہار
			ایک درجہ والی کثیر رقمی
			دو درجہ والی کثیر رقمی
			تین درجہ والی کثیر رقمی

حصّہ دوم: کثیر رقمی اظہاریوں پر عوامل

افقی طور پر کثیر رقمیوں کی جمع

مثال 1: $(3b + 5) + (2b + 4)$

حل:

$3b + 5 + 2b + 4$	قوسین کو ہٹا دیں۔
$3b + 2b + 5 + 4$	ایک جیسی اصطلاحات کو یکجا کریں۔
$5b + 9$	جواب دیں۔

مثال 2: $(-5x^2 - 10x + 2) + (3x^2 + 7x - 4)$

$-5x^2 - 10x + 2 + 3x^2 + 7x - 4$	قوسین کو ہٹا دیں، اس بات کو یقینی بنائیں کہ ہر اصطلاح کے ساتھ نشانی موجود ہے ۔
$-5x^2 + 3x^2 - 10x + 7x + 2 - 4$	ایک جیسی اصطلاحات کو یکجا کریں۔
$-2x^2 - 3x - 2$	جواب دیں۔

عمودی طور پر کثیر رقمی کی جمع

آپ عمودی طریقہ کے ذریعے کثیر رقمیوں کو جمع کر سکتے ہیں۔

مثال 3:

جمع کریں۔ $(3x^2 + 2x - 7) + (7x^2 - 4x + 8)$

حل:

ایک کثیر رقمی دوسرے کے نیچے لکھیں، اس بات کو یقینی بناتے ہوئے کہ اصطلاحات ایک جیسے ایک دوسرے کہ نیچے رکھ چکے ہیں ۔

شامل کریں : $(3x^2 + 2z - 7) + (7z^2 - 4z + 8)$

حل کریں : $3z^2 + 2z - 7$

$+7z^2 - 4z + 8$

اشارے پر پوری توجہ دیتے ہوئے شرائط کی طرح یکجا کریں ۔

$$\begin{array}{r} 3z^2 + 2z - 7 \\ +7z^2 - 4z + 8 \\ \hline +10z^2 - 2z + 1 \end{array}$$

جواب: $(3z^2 + 3z - 7) + (7z^2 - 4z + 8) = 10z^2 - 2z + 1$

افقی طور پر کثیر رقمیوں کی تفریق

جب آپ ایک کثیر رقمی کو دوسرے سے تفریق کرتے ہیں، تو آپ کو سب سے پہلے اس کے متضاد ملیں گے جو تفریق کیا جا رہا ہے، پھر اس طرح کی

اصطلاحات کو یکجا کریں۔ کثیرالاضلاع کے مخالف کو تلاش کرنے کے لیے آپ کو کثیر رقمی میں ہر اصطلاح کے نشان کو تبدیل کرنے کی ضرورت ہے۔

مثال 1:

$$(15x^2 + 12x + 20) - (9x^2 + 10x + 5)$$

اس مثال میں، $(9x^2 + 10x + 5)$ کو تفریق کرنا ہے لہذا آپ کو اس کثیر رقمی میں ہر اصطلاح کے نشان کو تبدیل کرنا ہوگا۔

کثیر رقمی کی ہر اصطلاح کی علامت کو تبدیل کریں۔	$(15x^2 + 12x + 20) \ - 9x^2 - 10x - 5$
قوسین کو ہٹا دیں۔	$15x^2 + 12x + 20 \ - 9x^2 - 10x - 5$
ایک جیسی اصطلاحات کو یکجا کریں۔	$15x^2 \ - \ 9x^2 + 12x \ - 10x \ + 20 - 5$
حل کریں اور جواب حاصل کریں۔	$6\,x^2 + 2x + 15$

مثال 2:

$$(4x - 10y + 15z) - (5x + 8y - 20z)$$

قوسین کے ذریعے دوسرے کثیر الثانی کے نشان کو تبدیل کریں۔	$4x - 10y \ + 15z - 5x - 8y + 20z$
ایک جیسی اصطلاحات کو ایک ساتھ ترتیب دیں۔	$4x - 5x - 10y - 8y + 15z + 20z$
حل کریں اور جواب حاصل کریں۔	$-x - 18y + 35z$

عمودی طور پر کثیر رقمیوں کی تفریق

کثیر رقمیوں کی عمودی طور پر تفریق بہت آسان طریقے سے کی جاتی ہے۔ ایک جیسی کثیر رقمیوں کو عمودی طور پر ترتیب دینے کے بعد، دوسری کثیر رقمی میں نشانیاں تبدیل کی جاتی ہیں۔ یہ دو یا زیادہ کثیر رقمیوں کو کم کرنے کا ایک آسان طریقہ بھی ہے۔

مثال 1:

$5x^2 - 14x - 15$ سے $4x^2 + 8x + 10$ تفریق کریں

- **مرحلہ نمبر 1:** کثیر رقمی کو معیاری شکل میں ترتیب دینا۔
- **مرحلہ نمبر 2:** جیسا کہ مندرجہ بالا دو کثیر رقمی اصطلاحات ہیں: $4x^2$ اور $5x^2$، $8x$ اور 10، $-14x$ اور -15
- **مرحلہ نمبر 3:** کثیررقمیوں کو اب اس طرح سے لکھیں جس میں ایک جیسی اصطلاح ایک دوسرے کہ اوپر اور نیچے آجائے ۔
- **مرحلہ 4:** تفریق ہونے والی کثیر رقمی کی علامات کو تبدیل کرنے کے بعد جواب معلوم کریں :

$$(5x^2 - 14x - 15) - (4x^2 + 8x + 10)$$

$$\begin{array}{l} 5x^2 - 14x - 15 \\ +4x^2 + \ 8x + 10 \\ - \quad\ \ - \quad\ \ - \\ \hline x^2 - 22x - \ 25 \end{array}$$

مثال 2: $7x^2 - 12y + 10$ سے $x^2 - 45y + 35$ کو گھٹائیں۔

حل:کثیر رقمیوں کو عمودی طور پر اسی طرح کی اصطلاحات کے مطابق ترتیب دیں، دوسرے کثیر رقمیوں کے نشانات کو تبدیل کریں، اورجواب معلوم کریں۔

$$\begin{array}{rrr} 7x^2 & -\ 12y & +\ 10 \\ x^2 & -\ 45y & +\ 35 \\ - & + & - \\ \hline 6x^2 & +\ 33y & -\ 25 \\ \hline \end{array}$$

کثیر رقمیوں کی ضرب

دو کثیر رقموں کو ضرب دینے کے لیے:

- ایک کثیر رقمی میں ہر اصطلاح کو دوسرے کثیر میں ہر اصطلاح سے ضرب دیں۔
- ان جوابات کو جمع کریں

مثال1:   ایک اصطلاح کی ایک اصطلاح سے ضرب

ایک اصطلاح کو دوسری اصطلاح سے ضرب دینے کے لیے، پہلے مستقل کو ضرب دیں، پھر ہر متغیر کو ضرب دیں (ایک ہی متغیر کو ضرب دینے کا مطلب ہے کہ ان کے درجہ کو شامل کرنا جیسے $y \times y = y^2$.

$$(2xy)(4y) = 2.4.xy.y = 8xy^2$$

مثال2:   ایک اصطلاح × دو اصطلاحات

دونوں اصطلاحات میں سے ہر ایک کہ واحد اصطلاح کو ضرب دیں۔

$$2x(x + 3xy) = 2x.x + 2x.3xy$$
$$= 2x^2 + 6x^2y$$

اسی طرح، $4x(2x^2 + y)$

$$4x(2x^2 + y) = (4x \times 2x^2) + (4x \times y) = 8x^3 + 4xy$$

مثال3: 2 اصطلاحات $2x$ اصطلاحات

پہلی دو اصطلاحات کو دو اصطلاحات میں سے باری باری ضرب کی جاتی ہے۔

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

اسی طرح

$$(2x+3y)\,(4x-5y)$$
$$= 2x(4x-5y) + 3y(4x-5y)$$
$$= 8x^2 - 10xy + 12xy - 15y^2$$
$$= 8x^2 + 2xy - 15y^2$$

کثیر رقموں کی تقسیم

دو کثیر رقمیوں کو تقسیم کرنے کے لئے ایک الجبری اظہار کو دوسرے الجبری اظہار کے نیچے رکھیں اور رتقسیم کا عمل شروع کریں ۔

$$\frac{x^2-3x-10}{x+2}$$

سب سے پہلے، بائیں طرف مقسوم اور دائیں طرف مقسوم علیہ رکیں :

$$x+2\overline{)x^2-3x-10}$$

مقسوم علیہ میں پہلی اصطلاح کو تقسیم کرنے والے میں پہلی اصطلاح سے تقسیم کریں، اور نتیجہ کو تقسیم کے اوپر والی لائن پر رکھیں۔

$$\begin{array}{l} \quad\;\; x \\ x+2\overline{)x^2-3x-10} \end{array}$$

اس نتیجے کو پورے تقسیم کار سے ضرب دیں، تو اس صورت میں، $(x+2)\times x = x^2+2\,x$ اس نتیجہ کو تقسیم کے نیچے رکھیں:

$$
\begin{array}{r}
x \phantom{{}-3x-10} \\
x + 2 \overline{)\, x^2 - 3x - 10} \\
x^2 + 2x \phantom{{}-10}
\end{array}
$$

نئی لائن کے نتائج کو براہ راست اوپر کی کثیر رقمی سے تفریق کو نوٹ کریں کہ تکنیکی طور پر آپ نشان کو تبدیل کرتے ہیں، لہذا اگر آپ کا نتیجہ منفی ہوتا ہے تو آپ اسے اس کے بجائے جمع کریں گے، اور اسے اس کے نیچے ایک لائن پر رکھیں۔ حتمی اصطلاح کو اصل مقسوم علیہ سے بھی نیچے لے جائیں۔

$$
\begin{array}{r}
x \phantom{{}-3x-10} \\
x + 2 \overline{)\, x^2 - 3x - 10} \\
\underline{-x^2 + 2x \phantom{{}-10}} \\
0 \; - 5x - 10
\end{array}
$$

اب نیچے کی لکیر پر تقسیم کار اور نئے کثیر الثانی کے ساتھ عمل کو دہرائیں۔ تو تقسیم کرنے والے کی پہلی اصطلاح (x) کو تقسیم ہونے والی کی پہلی اصطلاح ($-5\,x$) سے تقسیم کریں اور حاصل جواب کو اسے اوپر رکھیں:

$$
\begin{array}{r}
x \;\; - 5 \phantom{{}-10} \\
x + 2 \overline{)\, x^2 - 3x - 10} \\
\underline{-x^2 + 2x \phantom{{}-10}} \\
0 \; - 5x - 10
\end{array}
$$

اس نتیجہ کو اصل تقسیم کرنے والے سے ضرب دیں

(اس طرح $-5\,x - 10 \;=\; -5 \times (x + 2)$) اور نتیجہ کو نیچے رکھیں :

$$
\begin{array}{r}
x \;\; - 5 \phantom{{}-10} \\
x + 2 \overline{)\, x^2 - 3x - 10} \\
\underline{x^2 + 2x \phantom{{}-10}} \\
0 \; - 5x - 10 \\
-5x - 10
\end{array}
$$

$$\begin{array}{r} + \quad + \\ \hline -5x - 10 \end{array}$$

پھر نیچے کی کثیر کو اوپر کی کثیر سےتفریق کریں (لہذا اس صورت میں نشانیوں کو تبدیل کریں) اور نتیجہ کو نیچے رکھیں:

$$\begin{array}{r} x \quad -5 \\ x+2\overline{)x^2-3x-10} \\ x^2+2x \quad\quad \\ \hline 0 \;-5x-10 \\ -5x-10 \\ + \quad\quad + \\ \hline 0 \quad\quad 0 \end{array}$$

مثال 2:

$$\frac{6x^2+10x-24}{2x+6}$$

$$\begin{array}{r} 3x-4 \\ 2x+6\overline{)\cancel{6x^2}+10x-24} \\ -\cancel{6x^2}-18x \quad\quad \\ \hline -\cancel{8x}-\cancel{24} \\ +\cancel{8x}+\cancel{24} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

مثال 3:

$$\begin{array}{r} 4x+7 \quad\quad \\ x-3\overline{)4x^2-5x-21} \\ +4x^2-12x \quad\quad \\ - \quad\quad + \quad\quad\quad\quad \\ \hline +7x-21 \\ +7x-21 \\ - \quad\quad + \quad \\ \hline 0 \end{array}$$

مشق 2

1. درج ذیل کو حل کریں:

(i). $(2\,x+5)+(4x+6)$

(ii). $(x^2-6\,x-9)+(-\,5\,x^2+9\,x+2)$

(iii). $(2\,xy+x+5)-(3\,xy-2x+7)$

(iv). $(-\,7\,x^2y+xy+3x+2)-(5\,x^2y-5\,xy-6x-7)$

(v). $2x(x^3+2x^2-3x+4)$

(vi). $(x+y)(x-y)$

(vii). $(2p+3q)\times(4p-8q)$

(viii). $(x^2+n-3)\div(x+3)$

(ix). $(9x^2-6xy-8y^2)\div(3x+2y)$

(x). $(a^6-b^6)(a^2-b^2)$

2. ہر سوال کے لیے دیے گئے جوابات میں سے صحیح جواب پر (✓) کا نشان لگائیں۔

i) $4m$ کی ضرب $3m$ برابر ہے:

A. $7m^2$

B. $12m^2$

C. $12m^3$

D. $12m$

ii) $4m$ کی تقسیم $2m$ س برابر ہے:

A. 2

B. $2m$

C. $2m^2$

D. $8m$

iii) $(9\,x-6)-(-5x+7)$ کے برابر ہے:

A. $14x-13$

B. $4x+1$

C. $-4x+13$

D. $-4x-13$

vi) $(9\,x-6)+(-5x+7)$کے برابر ہے:

A. 14x + 1

B. 4x - 1

C. 4x + 1

D. 4x + 13

v) $-2(3x\ +1)$ برابر ہے:

A. 6x + 2

B. 6x + 2

C. 6x - 2

D. 6x – 2

یونٹ 6 اجزائے ضربی، ہمزاد مساوات

حصہ اول : اجزائے ضربی

عمل تجری

اگر دو یا دو سے زیادہ اظہاریوں کا حاصل ضرب دیئے ہوئے اظہارے کے برابر ہو تو یہ دو یا دو سے زیادہ اظہارے دیئے ہوئے اظہارے کے اجزاء ضربی کہلاتے ہیں ۔ مثال کے طور پر اگر $3x^2 + 6x = 3x(x+2)$ ہو تو $x, 3$ اور $(x+2)$ اجزاء ضربی ہوں گے $3x^2 + 6x$ کے۔ حاصل ضرب سے ظاہر کرتے ہیں۔

$ka + kb + kc$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

ہم جانتے ہیں کہ اگر k ایک غیر صفرحقیقی عدد ہے تو

$$\boxed{Ka + kb + kc = k\,(a + b + c)}$$

یہاں $k\,(a+b+c)$ کے k اور $a+b+c$ دو اجزاء ضربی ہیں۔

مثال1: **تجزی کریں:** (i) $5x + 10y + 20z$ (ii) $6x^2 + 12xy - 30xy^2$

(i) $5x + 10y + 20z$

حل:

$= 5(x + 2y + 4z)$

(کیوں کہ 5 مشترکہ جزو ضربی ہے)

(ii) $6x^2 + 12xy - 30xy^2$

$= 6x(x + 2y - 5y^2)$

(کیوں کہ 6x مشترکہ جزو ضربی ہے)

$ac + ad + bc + bd$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

ہم جانتے ہیں کہ $\boxed{ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d)}$

ثبوت:

$\text{R.H.S} = (a + b)(c + d)$

$= a(c + d) + b(c + d)$

$= ac + ad + bc + bd = \text{L.H.S}$

$\text{L.H.S} = \underline{ac + ad} + \underline{bc + bd}$

$= a(c + d) + b(c + d)$

$= (a + b)(c + d) = \text{R.H.S}$

مثال2: **تجزی کریں:-** (i) $5x + xz + 5z + z^2$ (ii) $3x^2y + 6xy^2 - 2xz - 4yz$

(i) $\underline{5x + xz} + \underline{5z + z^2}$

حل:

$= x(5 + z) + z(5 + z)$

$= (5 + z)(x + z)$

(ii) $\underline{3x^2y + 6xy^2} - \underline{2xz - 4yz}$

$= 3xy(x + 2y) - 2z(x + 2y)$

$= (x + 2y)(3xy - 2z)$

$a^2 \pm 2ab + b^2$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

(i) ہم جانتے ہیں کہ

(ii) ہم جانتے ہیں کہ

ثبوت: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$$L.H.S = a^2 + 2ab + b^2$$
$$= \underline{a^2 + ab} + \underline{ab + b^2}$$
$$= (a+b)(a+b)$$
$$= (a+b)^2 = R.H.S$$

ثبوت: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$$L.H.S = a^2 - 2ab + b^2$$
$$= \underline{a^2 - ab} - \underline{ab + b^2}$$
$$= a(a-b) - b(a+b)$$
$$= (a-b)(a-b) = (a-b)^2 = R.H.S$$

مثال1: **تجزی کریں:** $3x^2y + 6xy^2 - 2xz - 4yz$

مثال1: **تجزی کریں:** $\boldsymbol{x^2 + 6xy + 9y^2}$

حل: $x^2 + 6xy + 9y^2$

$$= (x)^2 + 2(x)(3y) + (3y)^2$$

(کلیہ کے ذریعہ) $= (x+3y)^2$

مثال2: **تجزی کریں:-** $\boldsymbol{25x^2 - 10xy + y^2}$

حل: $25x^2 - 10xy + y^2$

$$= (5x)^2 - 2(5x)(y) + (y)^2$$

(کلیہ کے ذریعہ) $= (5x-y)^2$

$a^2 - b^2$ کی طرز کے اظہاریوں کی تجزی

ہم جانتے ہیں کہ

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

ثبوت: $\mathbf{R.H.S} = (a+b)(a-b)$

مثال2: **تجزی کریں:**

حل: $4a^2 - 9b^2$

$$= (2a)^2 - (3b)^2$$
$$= (2a+3b)(2a-3b)$$

$= a(a-b) + b(a-b)$

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$ **L. H. S**

مثال2: **تجزی کریں:** (ii) $8a^2 + 50b^2$ (i) $25x^2 - 36y^2$

(i) $25x^2 - 36y^2$

حل:

$= (5x)^2 - (6y)^2$

$= (5x + 6y)\,(5x - 6y)$

(ii) $8a^2 + 50b^2$

$= 2(4a^2 - 25b^2)$

$= 2\{(2a)^2 - (5b)^2\}$

$= 2(2a + 5b)(2a - 5b)$

مشق 1:

(الف) ذیل کی تجزی کریں۔

(1) $4x + 8z$

(2) $2x - 4xy + 8xz$

(3) $5x + 10y + 3xz + 6yz$

(4) $x^2 + 5x + 6xy + 30y$

(5) $abc - abd + cx - xd$

(ب) تجزی کریں۔

(1) $a^2 + 10a + 25$

(2) $x^2 + 12xy + 36y^2$

(3) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

(4) $16a^2 + 40ab + 25b^2$

(5) $49p^2 - 14p + 1$

(ج) تجزی کریں۔

(1) $81x^2 - 4y^2$ **(2)** $169a^2 - 100b^2$ **(3)** $3a^2 - 27b^2$

(4) $2p^2 - 18q^2$ **(5)** $5x^2 - 125y^2$

حصا دوم : ہمزاد مساوات

ہمزاد ایک درجی مساوات

اگر آپ کے پاس دو مختلف مساواتیں ہیں جن میں سے ہر ایک میں ایک ہی دو نامعلوم ہیں، مثال کے طور پر، x اور y ، آپ دونوں نامعلوم کو حل کر سکتے ہیں۔ مساوات کے جوڑے کو بیک وقت سوالات کہتے ہیں۔ انہیں بیک وقت مساوات کہا جاتا ہے کیونکہ مساوات ایک ہی وقت میں حل ہوتی ہیں۔

$$2x + 4y = 14$$

$$4x - 4y = 4$$

مساوات کے اس سیٹ کے لیے، x اور y کے لیے اقدار کا ایک واحد مجموعہ ہے جو دونوں کو پورا کرے گا۔ یا تو مساوات، جسے الگ سے سمجھا جاتا ہے، درست حلوں کی لامحدودیت رکھتا ہے، لیکن ایک ساتھ صرف ایک ہے، جو (3، 2) (x,y) ہے۔

سرگرمی:

دوستوں کے ایک گروپ نے کیفے کراچی کا دورہ کیا۔ انہوں نے چائے اور کافی کا آرڈر دیا۔

دو چائے اور ایک کافی کی قیمت 200روپے ہے۔

ایک چائے اور ایک کافی کی قیمت 150 روپے ہے۔

جانئے ایک کپ چائے کی قیمت کتنی ہے؟ ایک کپ کافی کی قیمت کتنی ہے؟

آئیے فرض کریں کہ ایک کپ چائے کی قیمت $x=$ اور ایک کپ کافی کی قیمت $y=$

صورت حال سے، آپ دو مساوات بنا سکتے ہیں۔

(مساوات 1) $2x + y = 200$

(مساوات 2) $x + y = 150$

اگلے دن دوست کیفے حیدرآباد گئے، اور چائے اور کافی کا آرڈر دیا۔ انہوں نے تین چائے اور دو ٹافیوں کے لیے 350 روپے ادا کئے۔ اور 550 روپے تین چائے اور چار ٹافیاں۔

ایک چائے اور ایک کافی کی قیمت معلوم کرنے کے لیے، آپ کو بیک وقت مساوات بنانا ہوگی۔

(مساوات 1) $3x + 2y = 350$

(مساوات 2) $3x + 4y = 550$

ہمزاد مساوات کو حل کرنا

مثال 1:

(مساوات 1) ----------- $y = 24 + x$

(مساوات 2)---------- $2x - y = -6$

اس مثال میں، ہر مساوات میں y کا عدد برابر ہے اور وہ بھی مخالف ہیں۔

مساوات 1 اور مساوات 2 کو جوڑ کر، ہم متغیر، y کو ختم کر سکتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} x + y = 24 \\ + \; 2x - y = -6 \\ \hline 3x + 0 = 18 \end{array}$$

چونکہ مساوات 1 مثبت y اصطلاح پر مشتمل تھی جبکہ مساوات 2 میں منفی y اصطلاح شامل تھی، یہ دونوں اصطلاحات اضافے کے عمل میں ایک دوسرے کو منسوخ کر دیتی ہیں، جو کہ جمع میں کوئی y اصطلاح باقی نہیں رہتی ہے۔

اب ہمارے پاس ایک نئی مساوات ہے، لیکن ایک واحد نامعلوم متغیر x کے ساتھ ہے یہ ہمیں x: $3x = 18$ کی قدر کو آسانی سے حل کرنے کی اجازت دیتی ہے۔

دونوں طرف 3 ،سے تقسیم کرنی ہے ہم $x = 6$ حاصل کر سکتے ہیں۔

اصل مساوات میں x کی قیمت رکھنے سے

$$y = 24 + x$$
$$6 + y = 24$$

دونوں اطراف سے 6 کو گھٹائیں۔

$$6 - 6 + y = 24 - 6$$
$$y = 18$$

لہذا $(x, y) = (6, 18)$

مثال 2:

درج ذیل مساوات پر غور کریں۔

$2x + 2y = 14$ (مساوات 1)

$3x + y = 1$ (مساوات 2)

اس صورت حال میں آپ کو یہ سمجھنا چاہیے کہ دو مساوات کو جمع کرنے سے کسی نامعلوم کو ختم نہیں کیا جائے گا۔ x یا yاقدار۔ یہاں آپ کو عددی سرے کو برابر کرنے کے طریقے سیکھنے کی ضرورت ہے۔

ایک متغیر (اس صورت میں y) کے عددی سرا کو برابر اور مخالف بنانے کے لیے ہم مساوات (2) کو -2 سے ضرب دے سکتے ہیں:

$$\begin{array}{rr} & 2x + 2y = 14 \\ + & -6x - 2y = -26 \\ \hline & -4x + 0y = -12 \end{array}$$

ہم نے جو حاصل کیا ہے وہ ایک نئی مساوات ہے، جو کہ ایک واحد نامعلوم متغیر کے ساتھ، x ہے یہ ہمیں آسانی سے یہ مساوات ہمیں معلوم کرنے کہ لیے مدد کرتی ہے۔

$x - 4x = -12$ کی قدر۔

دونوں اطراف کو -4 سے تقسیم کرتے ہوئے، ہم $x = 3$ حاصل ہوا۔

جب ہمارے پاس ایک معلوم قدر x ہے۔ x ، اب ہم yحاصل کرنے کے لیے اصل مساوات میںx کی قیمت رکھیں گے۔

$2(3) + 2y = 14$

$6 + 2y = 14$

دونوں اطراف سے 6 کو گھٹائیں۔

$6 - 6 + 2y = 14 - 6$

$2y = 8$

دونوں اطراف کو 2 سے تقسیم کرنے سے، ہمیں4 ملتا ہے جو کہy کے برابر ہے۔

لہذا $(3,4) = (x, y)$

مثال 3: دو نمبروں کا مجموعہ 14 ہے اور ان کا فرق 2 ہے۔ اعداد تلاش کریں۔

دو نمبروں کو x اور y ہونے دیں۔

$x + y = 14$ (i)

$x - y = 2$ (ii)

مساوات (i) اور (ii) کو شامل کرنے سے، ہمیں $2x = 16$ ملتا ہے۔

یا، $\frac{2x}{2} = \frac{16}{2}$ یا، $x = \frac{16}{2}$

یا، $x = 8$

مساوات (i) میں قدر x کو بدلنے سے، ہمیں ملتا ہے۔

$8 + y = 14$

یا، $8 - 8 + y = 14 - 8$

یا، $y = 14 - 8$

یا، $y = 6$

لہذا، $x = 8$ اور $y = 6$

لہذا، دو نمبر 6 اور 8 ہیں۔

مثال 4: منو اور راجو کی موجودہ عمروں کا مجموعہ 11 سال ہے۔ منو راجو سے 9 سال بڑا ہے۔ ان کی موجودہ عمریں تلاش کریں۔

منو کی موجودہ عمر کو x سال اور راجو کی عمر y سال مانیں۔

$$x + y = 11 \ldots (1)$$
$$x - y = 9 \ldots (2)$$

(1) اور (2) کو شامل کرنے سے ہمیں ملتا ہے۔

$$2x = 20$$
$$x = 10$$

اور $x + y = 11$

$$10 + y = 11$$
$$y = 11 - 10 = 1$$

منو کی موجودہ عمر 10 سال اور راجو کی 1 سال ہے۔

مثال 5: اگر بیٹے کی عمر کو باپ کی عمر میں دو مرتبہ ملایا جائے تو رقم 56 بنتی ہے۔ لیکن اگر باپ کی عمر کو بیٹے کی عمر میں دو مرتبہ ملایا جائے تو رقم 82 بنتی ہے۔ باپ اور بیٹے کی عمریں معلوم کریں۔

والد کی عمر $x=$ سال

بیٹے کی عمر $y=$ سال

پھر $2y + x = 56 \ \dots \text{(i)}$

اور $y + 2x = 82 \ \dots \text{(ii)}$

مساوات (i) کو 2 سے ضرب کرنے سے، ہمیں ملتا ہے = $4y + 2x = 112 \text{ (iii)}$

x کو ختم کرنے کے لیے مساوات iii کو مساوات ii سے تفریق کریں۔

$$\begin{array}{rcl} 4y + \cancel{2x} = 112 & \text{———} & \text{(iii)} \\ y + \cancel{2x} = 82 & \text{———} & \text{(ii)} \\ (-) \quad (-) \qquad (-) & & \\ \hline 3y \qquad = 30 & & \end{array}$$

یا، $\frac{3y}{3} = \frac{30}{3}$

یا، $y = \frac{30}{3}$

یا، $y = 10$ (حل (ii) اور (iii) بذریعہ تفریق)

مساوات (i) میں y کی قدر کو بدلنے سے، ہمیں ملتا ہے؛

$2 \times 10 + x = 56$

یا، $20 + x = 56$

یا، $20 - 20 + x = 56 - 20$

یا، $x = 56 - 20$

$$x = 36$$

$$(x, y) = (36, 10)$$

متبادل طریقہ سے مساوات کو حل کرنا

متبادل کے طریقہ کار میں، ہم مساوات میں سے ایک کو اس طرح جوڑتے ہیں کہ ایک متغیر دوسرے کے لحاظ سے بیان کیا جاتا ہے: دی گئی بیک وقت مساوات پر غور کریں:

$$x + y = 24$$
$$2x - y = -6$$

مساوات 1 لیں اور x کے لحاظ سے y کی وضاحت کریں۔

$$x + y = 24$$
$$y = 24 - x$$

پھر، مساوات 2 میں اسی متغیر کے لیے اسے بدل دیں۔

اس صورت میں، ہم y لیتے ہیں، جو کہ $24 - x$ ہے اور اسے مساوات 2 میں پائی جانے والی y اصطلاح کے لیے بدل دیتے ہیں:

$$y = 24 - x$$
$$\downarrow$$
$$2x - y = -6$$
$$\downarrow$$
$$2x - (24 - x) = -6$$

اب جب کہ ہمارے پاس صرف ایک متغیر (x) کے ساتھ ایک مساوات ہے، ہم اسے "عام" الجبری طریقے کا استعمال کرتے ہوئے حل کر سکتے ہیں:

$$2x - 24 + x = -6$$

جیسی اصطلاحات کو ملا کر ہم حاصل کریں گے۔

$$3x - 24 = -6$$

ہر طرف 24 شامل کرنا، $3x = 18$

دونوں اطراف کو 3 سے تقسیم کرنا،

$x = 6$

اب جب کہ x معلوم ہے، ہم اس قدر کو کسی بھی اصل مساوات میں لگا سکتے ہیں اور y کے لیے ایک قدر حاصل کر سکتے ہیں۔ مساوات 1 میں $x = 6$ کا متبادل

$6 + y = 24$

ہر طرف سے 6 کو گھٹانے سے ہم حاصل کریں گے۔

$y = 18$

$(x, y) = (6, 18)$

مشق 2

1. x اور y کے لیے حل کریں: $5x + 3y = 7$ اور $3x + 5y = -23$

2. a اور b کے لیے حل کریں: $a - 9b = -2$ اور $10a - 8b = 610$

3. x اور y کی قدر معلوم کریں۔

$2x + 4y = 14$

$4x - 4y = 4$

4. متبادل کے طریقے سے بیک وقت مساوات کو حل کریں۔

$6a + b = 18$

$4a + b = 14$

5. اخراج کے طریقہ سے بیک وقت مساوات کو حل کریں۔

$3h + 2i = 8$

$2h + 5i = -2$

6. دو قلم اور ایک صافی کی قیمت روپے۔ 35 اور 3 قلم اور چار صافی کی قیمت روپے۔ 65 پنسل اور صافی کی قیمت الگ الگ تلاش کریں۔

7. دو نمبروں کا مجموعہ 209 ہے۔ اگر ایک عدد دوسرے کے دو گنا سے 7 کم ہے تو دو نمبر تلاش کریں۔

8. مستطیل کا دائرہ 158 سینٹی میٹر ہے۔ اگر لمبائی چوڑائی سے 3 گنا زیادہ ہے تو مستطیل کا رقبہ معلوم کریں۔

یونٹ 7 رقبہ اور حجم

مثلثی خطے کا رقبہ تلاش کرنا: ہیرو کا فارمولا

اگر a، b، اور cمثلث کے اطراف ہیں، اور sمثلث کا سیمی پیرامیٹر (تمام اطراف کی کل لمبائی کا نصف)ہے، تو مثلث کا رقبہ تلاش کرنے کا فارمولا استعمال کرتے ہوئے:

مثلث کا رقبہ

$\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$ = مربع یونٹ

نوٹ : sسیمی پیری میٹر ہے، جس کا مطلب ہے مثلث کا نصف فریم، اور یہ فارمولہ استعمال کرتے ہوئے پایا جاتا ہے:

$$s = \frac{(a+b+c)}{2}$$

مثال1:مثلث کا رقبہ تلاش کریں جس کے اطراف 6، 8اور 10سینٹی میٹر ہیں۔

حل:

اطراف کی لمبائی $= 10,8,6$

سیمی پیری میٹر کی قدر $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+8+10}{2} = 12$

مثلث کا رقبہ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(c-c)}$

$$= \sqrt{12\ (6)\ (4)\ (2)}$$

$$= \sqrt{496} = 24\ cm^2$$

مثال 2: علاقہ تلاش کریں۔مثلث کا جس کے اطراف 13 سینٹی میٹر، 14 سینٹی میٹر اور 15 سینٹی میٹر ہیں۔

حل:

آئیے $a = 13cm, b = 14cm \ and \ c = 15cm$

اب $s = \frac{a+b+c}{2}$

$$21 = \frac{13+14+15}{2}$$

$$\text{مثلث کا رقبہ} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s=c)}$$

$$= \sqrt{21\ (21-13)\ (21-14)\ (21-15)}$$

$$= \sqrt{21\ \times 8 \times 7 \times 6}$$

$$= \sqrt{7 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 2 \times 3}$$

$$= 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

$$= 84\ cm^2$$

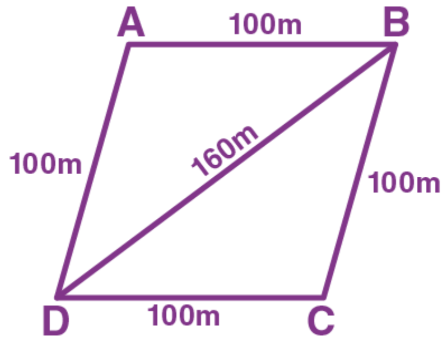
چوکور علاقے کا رقبہ تلاش کرنا: ہیرو کا فارمولا

ہیرو کا فارمولہ چوکور کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے بھی لاگو ہوتا ہے اگر چوکور کو مثلث حصوں میں تقسیم کیا جائے۔ ایک بار جب چوکور مثلث شکلوں میں تقسیم ہو جائیں تو ہم انفرادی تکونی حصوں کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے ہیرو کے فارمولے کو لاگو کر سکتے ہیں۔ ہر مثلثی حصے کے رقبہ تلاش کرنے کے بعد، چوکور کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے تمام علاقے شامل کریں۔

مثال 1: ABCD ایک معین کی شکل کی سطح ہے۔ رقبہ تلاش کریں اگر معین کا ہر رخ 100میٹر ہے۔ اخترن کی لمبائی،

BD = 160میٹر۔

معین کا ہر رخ 100 میٹر ہے۔ اختر‌ن کی لمبائی، BD = 160 میٹر۔



اب، مثلث ABD پر غور کریں۔

$$s = \frac{100 + 100 + 160}{2}$$

$$s = \frac{360}{2}$$

$$s = 180\ m$$

مثلث کا رقبہ $\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$ = ABD مربع اکائیاں۔

اب، ہیرو کے فارمولے میں $b = 100$، $a = 100$، $s = 180\ m$ اور $c = 160$ کو

تبدیل کریں، ہمیں ملتا ہے

$$A = \sqrt{[180\ (180 - 100)(180 - 100)(180 - 160)]}\ m^2$$

$$A = \sqrt{[180(80)(80)(20)]}\ m^2$$

$$A = \sqrt{23040000}\ m^2$$

$$A = 4800\ m^2$$

مثلث BDC مثلث ABD کے برابر ہے۔ لہذا، رومبس کا رقبہ ہے۔

$$4800 + 4800 = 9600\ m^2$$

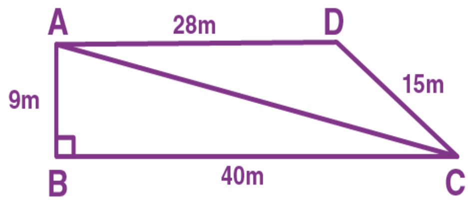
مثال 2:

یونیورسٹی کے طلباء نے صفائی مہم کے لیے ریلی نکالی۔ وہ دو گروہوں میں لین سے گزرے۔ ایک گروپ AB، BC اور CA کی گلیوں سے گزرا، اور دوسرا گروپ AC، CD اور DA سے گزرا جیسا کہ تصویر میں دکھایا گیا ہے۔ انہوں نے گلیوں

میں بند علاقے کو صاف کیا۔ طلباء کے ذریعہ صاف کیا گیا کل رقبہ تلاش کریں (لین کی چوڑائی کو نظر انداز کریں)، اگر

$AB = 9m$، $BC = 40m$، $CD = 15m$، $DA = 28m$ اور $\angle B = 90^0$ ۔ اس کے علاوہ، معلوم کریں کہ کس گروپ نے زیادہ علاقے کو صاف کیا اور کتنا.

حل:



اس کو دیکھتے ہوئے، $AB = 9m$، $BC = 40m$ اور $\angle B = 90^0$

لہذا، $AC = \sqrt{92 + 402} = \sqrt{81 + 1600}$

$AC = \sqrt{1681} = 41m$

اس طرح، طالب علموں کے پہلے گروپ نے مثلث ABC کے علاقے کو صاف کیا (جو دائیں زاویہ ہے)

لہذا، مثلث کا رقبہ $= \left(\frac{1}{2}\right)(40)(9)m^2$

$= 180m^2$

لہذا، لین ABC کو صاف کرنے والے طلباء کا پہلا گروپ $180m^2$ ہے۔

اب، طلباء کا دوسرا گروپ لین ACD کو صاف کرتا ہے، جو ایک سکیلین مثلث ہے جس کی سائیڈ کی لمبائی 41m، 28m اور 15m ہے۔

اب، ACD کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے ہیرون کا فارمولا استعمال کریں۔

تو، $s = \frac{41+28+15}{2}$

$s = 42m$

ہیرون کے فارمولے کا استعمال کرتے ہوئے، $A =$

$\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$ ہم حاصل کرتے ہیں

$$A = \sqrt{[42(42-41)(42-28)(42-15)]}\ m^2$$
$$A = \sqrt{[42(1)(14)(27)]}\ m^2$$
$$A = \sqrt{15876}\ m^2$$
$$A = 126\ m^2$$

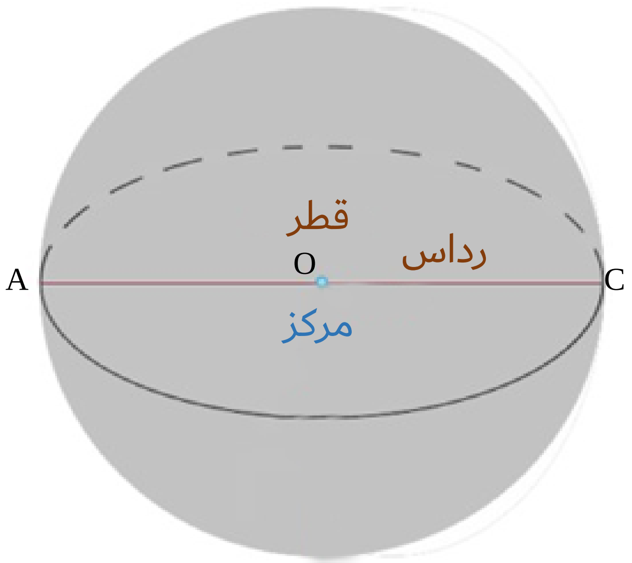
لہذا، طلباء کے دوسرے گروپ نے ACD $126m^2$ لین کو صاف کیا۔

تمام طلباء کے ذریعے صاف کیا گیا کل رقبہ $= (180 + 126)m^2 = 306m^2$

لہذا، طلباء کے پہلے گروپ نے طلباء کے دوسرے گروپ کے ذریعہ صاف کیے گئے علاقے سے زیادہ لین والے علاقوں کو صاف کیا۔

سطح کا رقبہ ایک کرہ

ایک کرہ دائرے کا تین جہتی ورژن ہے، جیسےکہ باسکٹ بال یا گیند۔ کرہ کی تعریف یہ ہے کہ "ہر وہ نقطہ جو مرکز کہلانے والے ایک نقطہ سے ایک ہی فاصلے پر ہو۔"



دائرے کا رداس مرکز سے سطح تک کا فاصلہ ہے۔ یہ ایک کرہ کے لیے اتنا ہی فاصلہ ہو گا چاہے اس کی سطح سے کہاں بھی پیمائش کی جائے۔

کرہ کا قطر وہ سیدھی لکیر ہے جو مرکز سے گزرتے ہوئے کرہ کی سطح پر دو پوائنٹس کو جوڑتی ہے۔

پائی ایک خاص نمبر ہے جو دائروں اور کرہوں کے ساتھ استعمال ہوتا ہے۔ یہ ہمیشہ جاری رہتا ہے، لیکن ہم ایک مختصر ورژن استعمال کریں گے جہاں π = 3.14 ہم فارمولوں میں نمبر pi کا حوالہ دینے کے لیے علامت □ کا بھی استعمال کرتے ہیں۔

کسی کرہ کی سطح کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے ہم ایک خاص فارمولہ استعمال کرتے ہیں۔

سطح کا رقبہ $= 4 \times □ \times r^2$

یہ کہنے کے مترادف ہے: $4\ x\ 3.14\ x$ رداس x رداس

مثال 1: ایک کرہ کی سطح کا رقبہ تلاش کریں جس کا رداس 5 سینٹی میٹر ہو۔

سطح کا رقبہ $= 4 \times □ \times r^2$

$= 4 \times 3.14 \times 5^2$

$= 4 \times 3.14 \times 25$

$= 100 \text{ x } 3.14 = 314\text{cm}^2$

مثال 2: ایک کرہ کی سطح کا رقبہ کیا ہے جس کا رداس 3 سینٹی میٹر ہے؟

سطح کا رقبہ $= 4 \times □ \times r^2$

$= 4 \times 3.14 \times 3^2$

$= 4 \times 3.14 \times 9$

$= 36 \text{ x } 3.14 = 113.04 \text{ cm}^2$

ایک کرہ کا حجم

ایک کرہ کا حجم معلوم کرنے کا ایک اور خاص فارمولا ہے۔ حجم یہ ہے کہ ایک کرہ کے اندر کتنی جگہ لی جاتی ہے۔ حجم کے سوال کا جواب ہمیشہ کیوبک اکائیوں میں ہوتا ہے۔

حجم $= \frac{4}{3}\,\square r^3$

مثال 1:

3 سینٹی میٹر کے رداس والے کرہ کا حجم کیا ہے؟

حجم $= \frac{4}{3}\pi r^3$

حجم $= \frac{4}{3} \times 3.14(3)^3$

حجم $= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 27$

حجم $= 113.04\ cm^3$

مثال 2:

رداس 2.1 سینٹی میٹر کے دائرے کا حجم اور سطح کا رقبہ تلاش کریں۔ $(\square = \frac{22}{7})$

حل:

دائرہ کا رداس $= 2.1cm$

کرہ کا حجم $= \frac{4}{3}\square r^3$

کرہ کا حجم $= \frac{3}{4} \times 3.14 \times (2.1)^3 = 38.8\ cm^3$

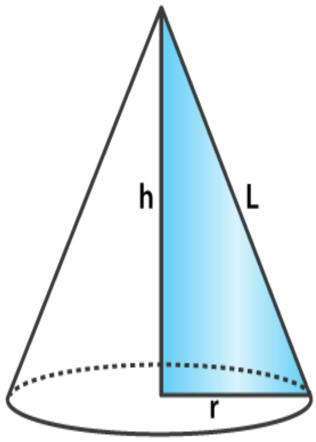
کرہ کی سطح کا رقبہ $= 4\square r^2$

کرہ کی سطح کا رقبہ $= 4 \times 3.14 \times 2.1 \times 2.1 = 55.44\ cm^2$

مخروط کا سطحی رقبہ

مخروط ایک 3D ڈھانچہ ہے جس کا ایک سرکلر بیس اور ایک چوٹی/عروق ہے۔ سرکلر بیس پر ہر پوائنٹ لائن سیگمنٹس کے سیٹ کے ذریعے سب سے اوپر سے جڑا ہوا ہے۔

مخروط کا سطحی رقبہ اس کی دو سطحوں سے ڈھکا ہوا مکمل علاقہ ہے، یعنی سرکلر بیس ایریا اور لیٹرل (مڑے ہوئے) سطح کا رقبہ۔مخروط کے کل سطحی رقبہ میں خمیدہ سطح کے ساتھ ساتھ اس کی بنیاد کا رقبہ بھی شامل ہوتا ہے۔



سرکلر بیس ایریا = $\mathrm{A} = \pi r^2$

خمیدہ سطح کا رقبہ = $\pi r l$

اس طرح کل سطح کا رقبہ =

$$\pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)$$

خروط کی ترچھی اونچائی چوٹی سے مخروطی بنیاد کے کنارے تک کا فاصلہ ہے۔ عمودی اونچائی عمودی اونچائی سے مراد مخروط کی گول بنیاد کے مرکز تک کا فاصلہ ہے۔ شنک کی ترچھی اونچائی تلاش کرنے کا فارمولہ دیا گیا ہے:

شنک کی ترچھی اونچائی، $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

جہاں 'h' عمودی اونچائی ہے اور 'r' مخروطی بنیاد کا رداس ہے۔

مثال 1 مڑے ہوئے سطح کے رقبے اور مخروط کے کل سطح کے رقبے کا تعین کریں جس کا بنیادی رداس 7 سینٹی میٹر اور ترچھی اونچائی 15 سینٹی میٹر ہے۔

حل:

$r = 7$ سینٹی میٹر

$l = 15$ سینٹی میٹر

مخروط کا خمیدہ سطح کا رقبہ = $\square rl$

مخروط کا خمیدہ سطح کا رقبہ = $3.14 \times 7 \times 15 = 329cm$

کل سطح کا رقبہ = $\pi r(r + l)$

$$= 3.14 \times 7\,(7 + 15)$$
$$= 3.14 \times 7 \times 22$$
$$= 21.98 \times (22)$$
$$= 483.56cm^2$$

مثال 2 : شنک کی ترچھی اونچائی 20 سینٹی میٹر ہے۔ بیس کا قطر 15 سینٹی میٹر ہے۔ مخروط کی مڑے ہوئے سطح کا علاقہ تلاش کریں۔

حل:

ترچھا اونچائی = $l = 20$ سینٹی میٹر

قطر = $d = 15$ سینٹی میٹر

رداس = $r = \frac{d}{2} = \frac{15}{2} = 7.5cm$

مخروط کا خمیدہ سطح کا رقبہ $= \square rl$

مخروط کا خمیدہ سطح کا رقبہ $= 20 \times 7.5 \times 3.14 = 471cm^2$

مخروط کا حجم

شنک کا حجم اس کی گنجائش ہے یا مخروط کے زیر قبضہ جگہ کی مقدار ہے۔
اسے ریاضیاتی طور پر اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے:
مخروط کا حجم $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
r بنیاد کا رداس ہے، h عمودی اونچائی ہے۔

مثال 1: شنک کا حجم معلوم کریں، اگر رداس 4 سینٹی میٹر اور اونچائی 9 سینٹی میٹر ہے۔

حل:

رداس $r = 4$ سینٹی میٹر

اونچائی $h = 9$ سینٹی میٹر

حجم کا فارمولا استعمال کرتے ہوئے

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$= \frac{1}{3}\,3.14(4)^2 \times 9$$
$$= 150.72cm^2$$

مثال 2 : زمین کا ایک گلوب ایک کرہ کی شکل میں ہے جس کا رداس 14 سینٹی میٹر ہے، حجم اور سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

کرہ کی سطح کا رقبہ۔ S = سطح کا رقبہ $S = 4\pi r^2$ $S = 4(3.14)(14)^2$ $S = 2461.76\ cm^2$	کرہ کا حجم ہے V = حجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $V = \frac{4}{3}(3.14)\ (14)^3$ $V = 11{,}488.21\ cm^3$

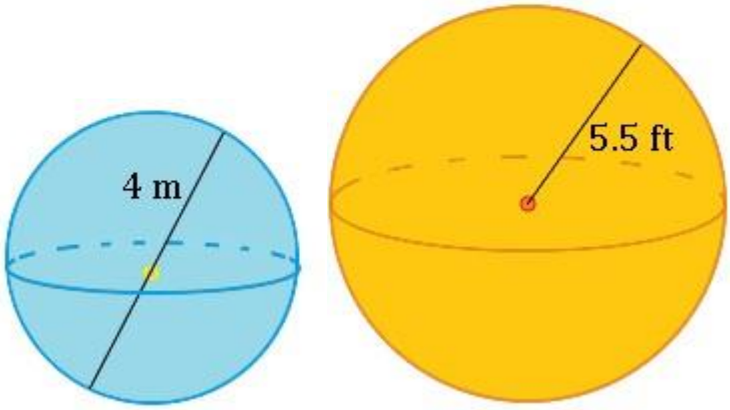
مشق 1

1. ایک کھیت معین کی شکل میں ہے اور اس میں 18 گائیں چرنے کے لیے جاتی ہیں۔ اس بات کا تعین کریں کہ ہر گائے کو گھاس کے میدان کا کتنا رقبہ ملے گا، اگر معین کا ہر رخ 30m ہے اور اس کی سب سے بڑے رخ کی لمبائی 48m ہے۔

2. مثلث کا رقبہ کیا ہے جس کے طرف کی لمبائی 5 ہے ؟

3. 7، 8 اور 9 سینٹی میٹر لمبائی والے مثلث کا رقبہ معلوم کریں۔

4. دیے گئے دائروں کی سطح کا رقبہ اور حجم تلاش کریں۔



5. ایک شنک کی بنیاد کا رداس 6mہے اور ترچھی اونچائی 6.5mہے، حجم اورسطح کا رقبہ معلوم کریں۔

6. ایک شنک کا حجم معلوم کریں جس کا رداس 3 سینٹی میٹر اور اونچائی 7 سینٹی میٹر ہے۔ ($\pi = 3.14$ استعمال کریں)۔

7. ایک شنک کا حجم کیا ہے جس کا قطر 8 سینٹی میٹر اور اونچائی 12 سینٹی میٹر ہے۔ ($\pi = 3.14$ استعمال کریں)

8. شنک کا حجم اور سطح کا رقبہ اونچائی 6 اور رداس 2 سینٹی میٹر کے ساتھ تلاش کریں۔

9. مجید ایک کاغذ کی لپیٹ میں فرنچ فرائز پیش کرتا ہے جس کی شکل شنک کی طرح ہوتی ہے۔ مخروطی لپیٹ کا حجم کیا ہوگا جبکہ اس کی 8 سینٹی میٹر لمبا اور 5 سینٹی میٹر قطر ہے؟

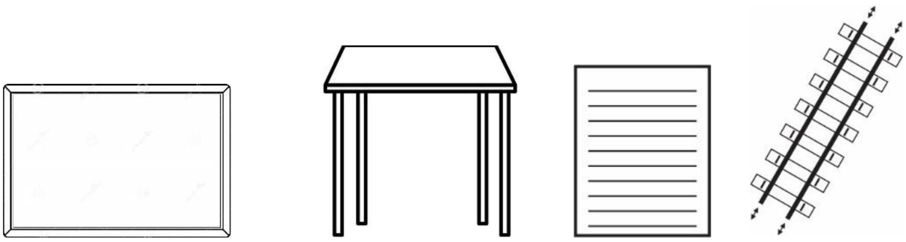
10. ایک ورزشی گیند کا رداس 15 سینٹی میٹر ہوتا ہے۔ اس کا حجم اور سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

یونٹ 8 متوازی خطوط

حصّہ اوّل: متوازی خطوط

(الف) متوازی خطوط:

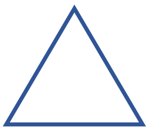
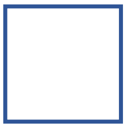
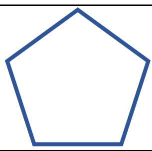
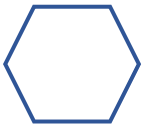
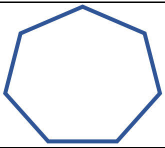
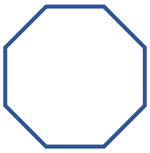
شام کے وقت کریم اور اُس کا بڑا بھائی اپنا ہوم ورک کرنے میں مصروف تھے تو کریم ادھر ادھر دیکھ رہا تھا اور کچھ پریشان بھی تھا۔ اس پر اُس کے بھائی نے پوچھا کہ کیا ہوا کریم کیا بات ہے؟ اس پر کریم نے بتایا کہ ٹیچر نے آج متوازی خطوط کے بارے میں پڑھایا تھا اور ہوم ورک کے طور پر متوازی خطوط کی کچھ مثالیں تلاش کرنے کے لیے کہا ہے۔ کریم کے بھائی نے کہا آؤ میں تمھیں کچھ مثالیں بتاتا ہوں۔ جیسے:



(ب) کثیر الاضلاع:

اسلم نے ٹیچر سے سوال کیا کہ سر تکون جس کے تین اطراف ہوتے ہیں، جسے مثلث کہتے ہیں۔ تو کیا چار، پانچ، چھ اور سات اطراف والی اشکال بھی ہوتی ہیں اور ان کو کیا کہتے ہیں؟ ٹیچر نے کہا، شاباش اسلم! تم نے بہت اچھا سوال کیا۔ آج میں آپ سب کو کثیر الاضلاع اشکال کے بارے میں پڑھاتا ہوں۔

ٹیچر نے تختہ تحریر پر کچھ اشکال بنائیں اور پہلی شکل کی طرف اشارہ کرتے ہوئے پوچھا بتاؤ یہ کون سی شکل ہے اور اس کی کتنی اطراف ہیں؟ تمام نے یَک زبان ہو کر کہا یہ مثلث ہے اور اس کی تین اطراف ہیں۔

	یہ مثلث ہے اور اس کی تین اطراف ہیں۔
	شکل نمبر 2 کی چار اطراف ہیں اور اسے چوکور کہتے ہیں۔
	شکل نمبر 3 کی پانچ اطراف ہیں اور اسے مخمس کہتے ہیں۔
	شکل نمبر 4 کی چھ اطراف ہیں اور اسے مسدس کہتے ہیں۔
	شکل نمبر 5 کی سات اطراف ہیں اور اسے مسبع کہتے ہیں۔
	شکل نمبر 6 کی آٹھ اطراف ہیں اور اسے مثمن کہتے ہیں۔

ٹیچر نے مزید وضاحت کرتے ہوئے کہا کہ یہ تمام اشکال کثیر الاضلاع کہلاتی ہیں اور ان کی تعریف ہم یوں بیان کر سکتے ہیں کہ ”کسی مستوی میں واقع تین یا زاید اضلاع سے گھری ہوئی بند شکل کثیر الاضلاع کہلاتی ہے۔“

اوپر دی گئی مثالیں کثیر الاضلاع کی ہیں۔

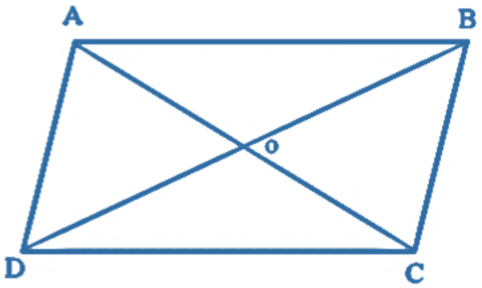
(ج) متوازی الاضلاع:

متوازی الاضلاع ایک چوکور ہوتی ہے جس کے متقابل ضلعے، زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

$\overline{AB} \cong \overline{DC}$ اور

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$

$\angle A \cong \angle C$ اور $\angle B \cong \angle D$



وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

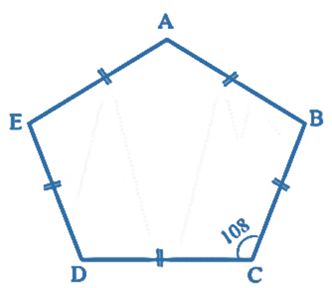
$\overline{AO} \cong \overline{OC}$ اور $\overline{BO} \cong \overline{OD}$

اور ہر ضلع کے سروں پر بننے والے زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

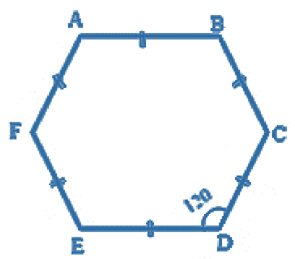
$$m\angle A = m\angle B = 180°$$
$$m\angle B = m\angle C = 180°$$
$$m\angle C = m\angle D = 180°$$
$$m\angle D = m\angle A = 180°$$

(د) منظم مخمس، مسدس اور مثمن:

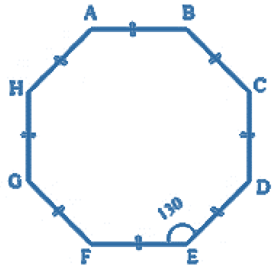
ٹیچر نے کہا کہ ہم پہلے مخمس، مسدس اور مثمن کے بارے میں پڑھ چکے ہیں لیکن آج ہم ایسے مخمس، مسدس اور مثمن کے بارے میں پڑھیں گے جن کے تمام ضلعے اور زاویے آپس میں متماثل (برابر) ہوتے ہیں۔



منظم مخمس: پانچ اضلاع والی ایسی بند شکل جس کے تمام اضلاع اور زاویے آپس میں متماثل ہوتے ہیں اور ہر اندرونی زاویے کی پیمائش 108° ہوتی ہے، تمام زاویوں کا مجموعہ 540° ہوتا ہے، مخمس کہلاتا ہے۔



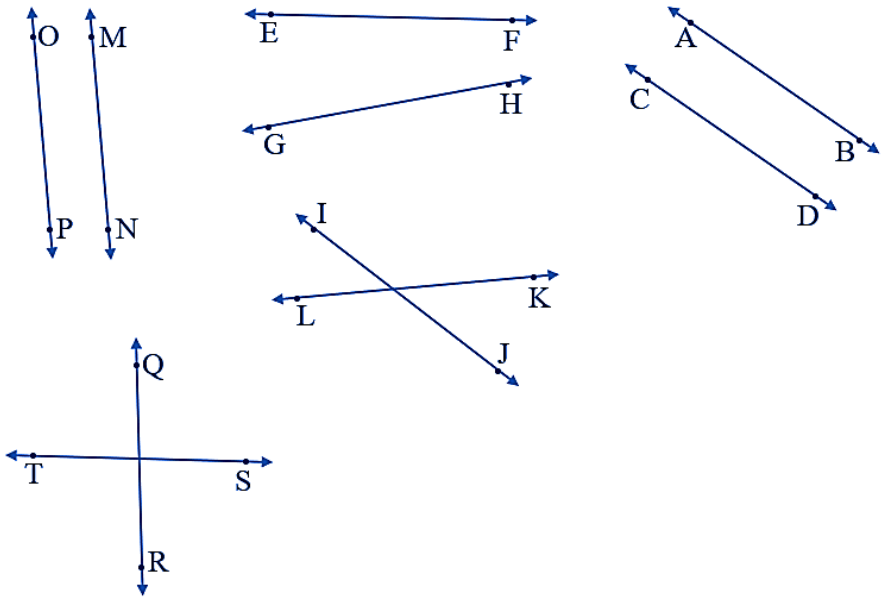
منظم مسدس: چھ اضلاع والی ایسی بند شکل جس کے تمام اضلاع اور زاویے آپس میں متماثل ہوتے ہیں اور ہر اندرونی زاویے کی پیمائش 120° ہوتی ہے، تمام زاویوں کا مجموعہ 720° ہوتا ہے، مسدس کہلاتا ہے۔



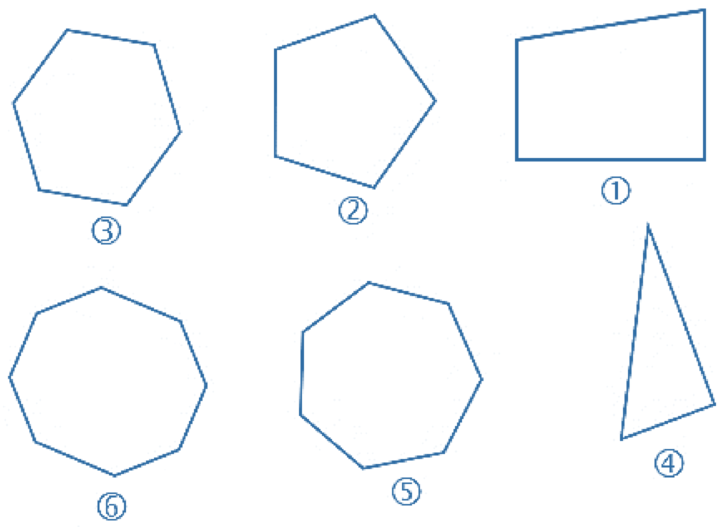
منظم مثمن: آٹھ اضلاع والی ایسی بند شکل جس کے تمام اضلاع اور زاویے آپس میں متماثل ہوتے ہیں اور ہر اندرونی زاویے کی پیمائش 135° ہوتی ہے، تمام زاویوں کا مجموعہ 1080° ہوتا ہے، مثمن کہلاتا ہے۔

مشق نمبر 1

سوال 1: مندرجہ ذیل میں کون سے متوازی خطوط ہیں؟



سوال 2: مندرجہ ذیل کثیر الاضلاع کے نام بتائیں۔



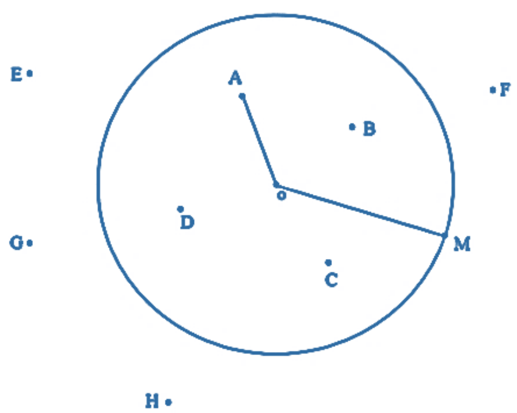
سوال 3:	منظم مخمس کی تعریف بیان کریں اور منظم مخمس کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ بتائیں۔

سوال 4:	منظم مسدس کی تعریف بیان کریں اور منظم مسدس کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ بتائیں۔

سوال 5:	منظم مثمن کی تعریف بیان کریں اور منظم مثمن کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ بتائیں۔

حصّہ دوم: دائرے، اندرونی اور بیرونی نقاط

ٹیچر نے تختہ تحریر پر ایک بڑا دائرہ بنایا اور چند نقاط لگائے اور طلبہ سے سوال کیا کہ بتاؤ کون کون سے نقاط دائرے کے اندر ہیں اور کون کون سے نقاط دائرے کے باہر ہیں؟



طلبہ نے ہم زبان ہو کر کہا نقاط A، B، C اور D دائرے کے اندر ہیں اور نقاط E، F، G اور H دائرے کے باہر ہیں۔ ٹیچر نے کہا شاباش، لیکن اسے ریاضی کی زبان میں کچھ یوں

کہتے ہیں۔

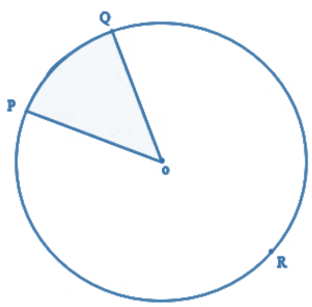
جن نقاط کا مرکز سے فاصلہ دائرے کے رداس سے کم ہوتا ہے وہ تمام نقاط دائرے کے اندرونی نقاط کہلاتے ہیں، جیسے دائرے کا رداس $\overline{OM}$ ہے۔

جیسے: $\overline{OA} < \overline{OM}$ ، $\overline{OB} < \overline{OM}$ ، $\overline{OC} < \overline{OM}$ اور $\overline{OD} < \overline{OM}$ ۔ لہٰذا A، B، C اور D ایسے نقاط ہیں جو دائرے کے اندر واقع ہیں۔

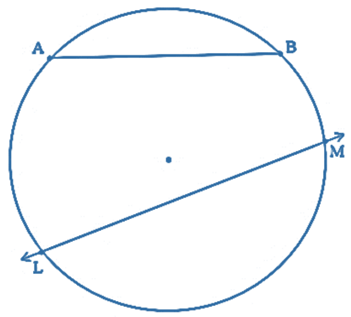
جن نقاط کا مرکز سے فاصلہ رداس سے زیادہ ہوتا ہے وہ تمام نقاط دائرے کے بیرونی نقاط کہلاتے ہیں۔

جیسے: $\overline{OE} < \overline{OM}$ ، $\overline{OF} < \overline{OM}$ ، $\overline{OG} < \overline{OM}$ اور $\overline{OH} < \overline{OM}$ ۔ لہٰذا E، F، G اور H ایسے نقاط ہیں جو دائرے سے باہر واقع ہیں۔

دائرے سے متعلق چند اصطلاحات کی وضاحت مثلاً قطاع دائرہ، قاطع، وتر، مماس اور ہم مرکز دائرے۔



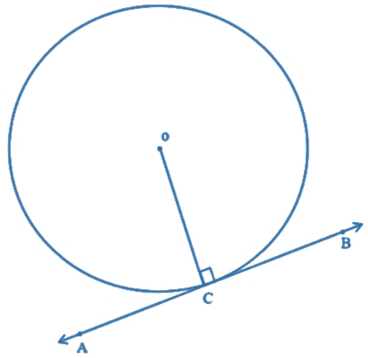
قطاع دائرہ: دائروی علاقہ کا وہ حصہ جو کسی قوس اور دو رداسی قطعات سے گھیرا ہوا ہو۔ قطاع دائرہ کہلاتا ہے۔ سامنے دی ہوئی شکل میں سایہ دار حصہ قطاع دائرہ ہے۔ یہ دو رداس $\overline{OP}$، $\overline{OQ}$ اور قوس $\widehat{PQ}$ سے گھیرا ہوا ہے۔ اور اس کے علاوہ غیر سایہ دار علاقہ بھی قطاع دائرہ ہے۔ یہ دو رداس $\overline{OP}$، $\overline{OQ}$ اور قوسِ کبیرہ $\widehat{PRQ}$ سے گھیرا ہوا ہے۔



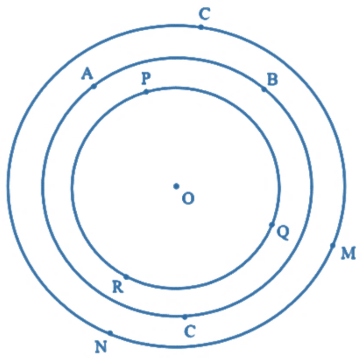
قاطع: ایسا خط جو دائرے کے کسی دو نقاط سے گزرے، اُسے قاطع کہتے ہیں۔ شکل میں $\overleftrightarrow{LM}$ ایک قاطع ہے جو دائرے کے دو نقاط L اور M سے گزر رہا ہے۔

وتر: دائرے کے کسی دو نقاط کو ملانے والا قطعہ

خط وتر کہلاتا ہے۔ شکل میں $\overline{AB}$ ایک وتر ہے جو دائرے کے دو نقاط A اور B کو ملاتا ہے۔



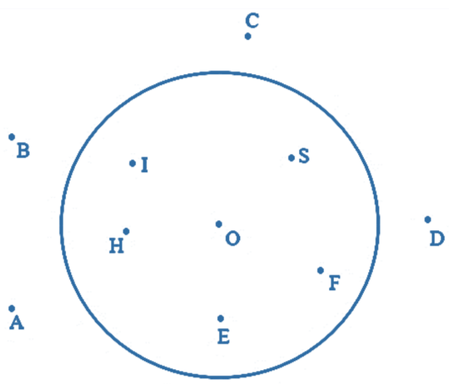
مماس: اگر کوئی خط کسی دائرے کو ایک اور صرف ایک نقطہ پر قطع کرے تو وہ مماس کہلاتا ہے یعنی مماس ایسا خط ہے جو دائرے کو چھوتا ہوا گزرتا ہے۔ شکل میں $\overleftrightarrow{AB}$ ایک مماس ہے۔ دائرے کو نقطہ C پر چھوتا ہے۔ رداسی قطع ہمیشہ مماس کے مقام پر عمود ہوتا ہے۔ مثلاً $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OC}$



ہم مرکز دائرے: دو یا دو سے زائد دائرے جن کا مرکز ایک ہی نقطہ ہو مگر رداس مختلف ہوں، ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں۔

دی گئی شکل میں εPQR، εABC اور εLMN ہم مرکز دائرے ہیں۔

مشق نمبر 2



سوال 1: سامنے دی گئی شکل میں کون سے نقاط دائرے کے اندر ہیں اور کون سے نقاط دائرے کے باہر ہیں؟ وضاحت بھی کریں۔

سوال 2: مندرجہ ذیل اصطلاحات کی وضاحت کریں۔

(i) قطاع دائرہ (ii) قاطع

(iii) وتر (iv) مماس

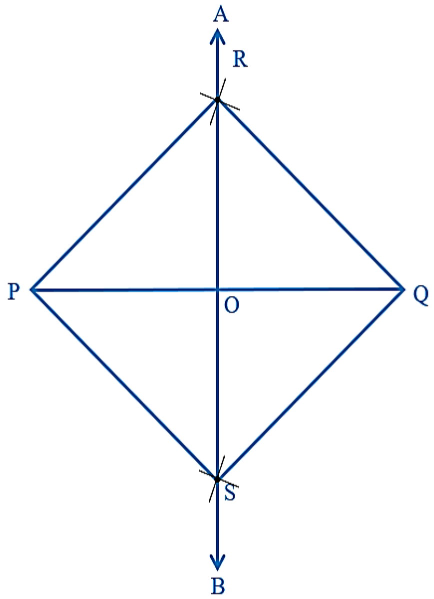
(v) ہم مرکز دائرے

یونٹ 9 عملی جیومیٹری

حصّہ اوّل: مربع بنانا

مربع ایسی بند شکل کو کہتے ہیں جس کے چار اضلاع اور چار زاویے ہوتے ہیں اور چاروں اندرونی زاویوں کا مجموعہ 360° ہوتا ہے۔ آج ہم مربع بنانا سیکھیں گے۔

(i) مربع بنانا جب کہ اس کا وتر معلوم ہو۔



مثال 1: ایک مربع PQRS بنائیں جس کے وتر کی لمبائی 8 سینٹی میٹر ہے۔

حل: مراحل

(i) ایک قطعہ خط $\overline{PQ}$ کھینچیں جس کی لمبائی 8 سینٹی میٹر ہے جو کہ مربع کا وتر ہے۔

(ii) $\overline{QP}$ کا عمودی ناصف $\overline{AB}$ کھنچیں جو $\overline{PQ}$ کو نقطہ O پر قطع کرتا ہے۔

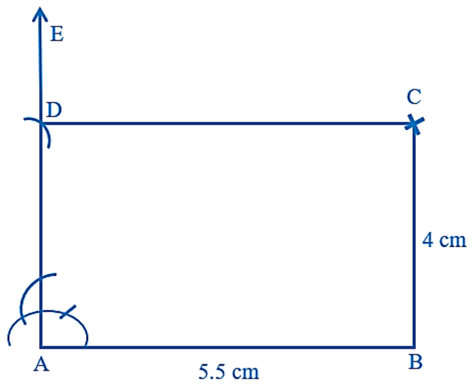
(iii) نقطہ O کو مرکز مان کر $m\overline{PO}$ کی پیمائش کے مطابق $\overline{PQ}$ کے دونوں جانب $\overline{AB}$ پر قوسین لگائیں۔ $\overline{AB}$ کو نقاط R اور S پر قطع کرے گی۔

(iv) پھر P کو R اور S سے، Q کو R اور S سے ملائیں۔ جس سے ہمیں $\overline{PQ}$، $\overline{RQ}$، QS اور $\overline{PS}$حاصل ہوتا ہے۔

پس، PQRS مطلوبہ مربع ہے۔

حصّہ دوم: مستطیل بنانا

(i) مستطیل بنانا جب اس کے دو اضلاع معلوم ہوں۔



مثال 1: ایک مستطیل ABCD بنائیں جس میں $\overline{AB} = 5.5cm$ اور $\overline{BC} = 4\text{cm}$ ہو۔

حل: مراحل

(i) 5.5 سینٹی میٹر قطعہ خط $\overline{AB}$ کھینچئے۔

(ii) نقطہ A پر $\overline{AE} \perp \overline{AB}$ کھینچئے۔

(iii) نقطہ A کو مرکز مان کر 4 سینٹی میٹر رداس کی ایک قوس لگائیں جو $\overline{AE}$ کو نقطہ D پر قطع کرے گی۔

(iv) نقطہ D کو مرکز مان کر رداس $\overline{AB}$ کے برابر ایک قوس لگائیں۔

(v) نقطہ B کو مرکز مان کر $\overline{AD}$ کے برابر ایک قوس لگائیں جو ایک دوسرے کو نقطہ C پر قطع کریں گی۔

(vi) پھر D کو C سے اور B کو C سے ملائیں۔

پس، ABCD مطلوبہ مستطیل ہے۔

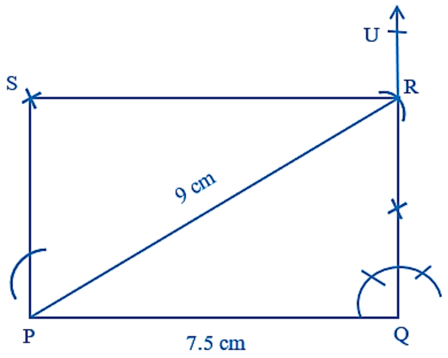
(ii) مستطیل بنانا جب اس کا وتر اور ایک ضلع معلوم ہو۔

حل: مراحل

(i) 7.5 سینٹی میٹر قطعہ خط $\overline{PQ}$ کھینچئے۔

(ii) نقطہ Q پر $\overline{UQ} \perp \overline{PQ}$ کھینچئے۔

(iii) نقطہ P کو مرکز مان کر 9 سینٹی میٹر رداس کی ایک قوس $\overline{UQ}$ پر لگائیں جو $\overline{UQ}$ کو نقطہ R پر قطع کرے گی۔



مثال 2: ایک مستطیل PQRS بنائیں جس میں وتر $\overline{PR} = 9cm$ اور ایک ضلع $\overline{PQ} = 7.5cm$ ہے۔

(iv) نقطہ R کو نقطہ P سے ملائیں، یوں ہمیں $\overline{PR}$ حاصل ہو گا۔

(v) نقطہ P کو مرکز مان کر رداس $\overline{QR}$ کے برابر ایک قوس لگائیں۔

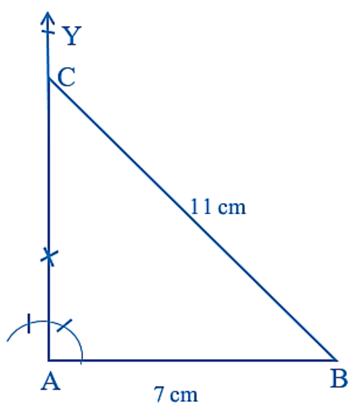
(vi) نقطہ R کو مرکز مان کر رداس $\overline{PQ}$ کے برابر ایک قوس لگائیں جو پہلی قوس کو نقطہ S پر قطع کرے گی۔

(vii) نقطہ P کو S اور نقطہ R کو S سے ملائیں۔

پس، PQRS مطلوبہ مستطیل ہے۔

حصّہ سوم: قائمتہ الزاویہ مثلث بنانا

(i) مثلث بنانا جب وتر اور ایک ضلع معلوم ہو۔



مثال 1: قائمتہ الزاویہ مثلث ABC بنائیں جس میں وتر BC = 11cm اور ایک ضلع $\overline{AB} = 7cm$ ہو۔

حل: مراحل

(i) 7 سینٹی میٹر قطعہ خط $\overline{AB}$ کھینچئے۔

(ii) نقطہ A پر $\overline{AB} \perp \overline{AY}$ کھینچئے۔

(iii) نقطہ B کو مرکز مان کر 11 سینٹی میٹر رداس کی ایک قوس $\overline{AY}$ پر لگائیں جو $\overline{AY}$ کو نقطہ C پر قطع کرے گی۔

(iv) نقطہ B اور C کو ملائیں جس سے $\overline{BC}$ حاصل ہو گا۔

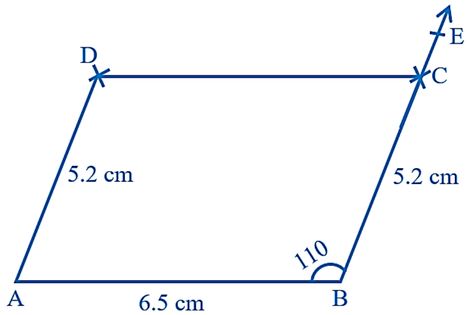
پس، ABC مطلوبہ مثلث ہے۔

حصّہ چہارم: متوازی الاضلاع بنانا

(i) مثلث بنانا جب متصلہ اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ معلوم ہو۔

مثال 1: متوازی الاضلاع ABCD بنائیں جس میں $\overline{AB} = 6.5cm$ ، $m\,\overline{BC} = 5.2c$ اور

$m\angle ABC = 110°$ ہو۔



حل: مراحل

(i) 6.5 سینٹی میٹر قطعہ خط $\overline{AB}$ کھینچئے۔

(ii) پروٹریکٹر کی مدد سے نقطہ B پر °110 کا زاویہ $m\angle ABC$ بنائیں۔

(iii) نقطہ B کو مرکز مان کر 5.2 سینٹی میٹر رداس کی ایک قوس $\overline{BE}$ پر لگائیں جو کہ نقطہ C پر قطع کرے گی۔

(iv) نقطہ A کو مرکز مان کر 5.2 سینٹی میٹر کی ایک قوس لگائیں۔

(v) نقطہ C کو مرکز مان کر 6.5 سینٹی میٹر کی ایک قوس لگائیں جو پہلی قوس کو نقطہ D پر قطع کرے گی۔

(vi) نقطہ A کو D سے اور نقطہ C کو D سے ملائیں۔

پس، ABCDمطلوبہ متوازی الاضلاع ہے۔

مشق نمبر 1

سوال 1: ایک مربع ABCD بنائیں جس کے وتر کی لمبائی 7.5 سینٹی میٹر ہے۔

سوال 2: ایک مربع PQRS بنائیں جس کے وتر اور ایک ضلع کی لمبائی میں

فرق 3.5 سینٹی میٹر ہے۔

سوال 3: ایک مربع XYZ بنائیں جب کہ اس کے وتر اور ایک ضلع کی مقداروں کا مجموعہ 10.5 سینٹی میٹر ہے۔

سوال 4: ایک مستطیل LMNP بنائیں جس میں $\overline{LM} = 8.5cm$ اور $\overline{MN} =$ 5cm ہے۔

سوال 5: مستطیل RSTU بنائیں جس میں وتر $\overline{RT} = 10cm$ اور ایک ضلع $\overline{RS} = 8cm$ ہے۔

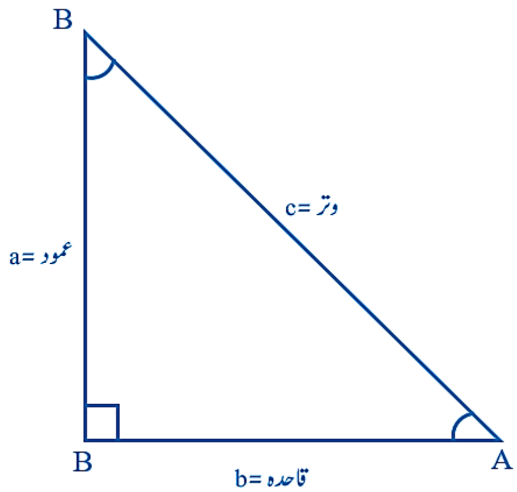
سوال 6: قائمتہ الزاویہ مثلث PQR بنائیں جس میں وتر $\overline{QR} = 10cm$ اور ضلع $\overline{PQ} = 6cm$ ہے۔

سوال 7: متوازی الاضلاع KLMN بنائیں جس میں $\overline{KL} = 7cm$ ، $\overline{LM} = 4.5cm$ اور $\angle KLM = 135°$ ہے۔

یونٹ 10 تکونیات کا تعارف

حصّہ اوّل: تکونیات اور حادہ زاویوں کی تکونیاتی نسبتیں

جیسا کہ پہلے پڑھ چکے ہیں۔ مثلث کے تین اضلاع اور تین زاویے ہوتے ہیں۔



اس یونٹ میں ہم مثلث کے نامعلوم اجزا کی مقداریں معلوم کرنا سیکھیں گے۔ مثلث کے نامعلوم اجزا کی مقداریں معلوم کر نے کے لیے ہمیں علمِ تکونیات کی ضرورت پڑتی ہے۔ تکونیات ریاضی کی اہم شاخ ہے۔ لفظ (Trignomatery) یونانی زبان کا لفظ ہے جس سے مراد زاویوں کی پیمائش ہے۔

دی گئی شکل میں ABC ایک قائمتہ الزاویہ مثلث ہے۔ جس میں زاویہ C قائمہ زاویہ ہے۔ $\angle A$، $\angle B$ اور $\angle C$ کے متقابلہ اضلاع کی مقداریں بالترتیب a، b اور c سے ظاہر کی گئی ہیں۔ یعنی $m\overline{AB} = c$ اور $m\overline{AC} = b$ اور $m\overline{BC} = a$ کی قائمتہ مثلث کے حادہ زاویوں کے لیے کوئی سے دو اضلاع کی نسبت تکونیاتی نسبت کہلاتی ہے۔

حادہ زاویے کے تین اضلاع کی مدد سے چھ ممکنہ نسبتیں بن سکتی ہیں جو کہ مندرجہ ذیل ہیں۔

قائمتہ الزاویہ مثلث ABC کے زاویہ حادہ A پر غور کریں۔

(i) $\quad \text{Sin}(m\angle A) = \dfrac{\text{عمود}}{\text{وتر}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}} = \dfrac{a}{c}$

(ii) $\text{Cos}(m\angle A) = \dfrac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \dfrac{b}{c}$

(iii) $\tan(m\angle A) = \dfrac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}} = \dfrac{a}{b}$

(iv) $\text{Cot}(m\angle A) = \dfrac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{BC}} = \dfrac{b}{a}$

اہم معلومات

Sin = Sine
Cos = Cosine
Tan = Tangent
Cosec = Cosecant
Sec = Secant
Cot = Cotangent

(v) $\text{Sec}(m\angle A) = \dfrac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}} = \dfrac{c}{b}$

(vi) $\text{Cosec}(m\angle A) = \dfrac{\text{وتر}}{\text{عمود}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} = \dfrac{c}{a}$

قائمتہ الزاویہ مثلث ABC کے زاویہ حادہ B پر غور کریں۔

(i) $\text{Sin}(m\angle B) = \dfrac{\text{عمود}}{\text{وتر}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \dfrac{b}{c}$

(ii) $\text{Cos}(m\angle B) = \dfrac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}} = \dfrac{a}{c}$

(iii) $\tan(m\angle B) = \dfrac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{BC}} =$

(iv) $\text{Cot}(m\angle B) = \dfrac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}} =$

(v) $\text{Sec}(m\angle B) = \dfrac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} =$

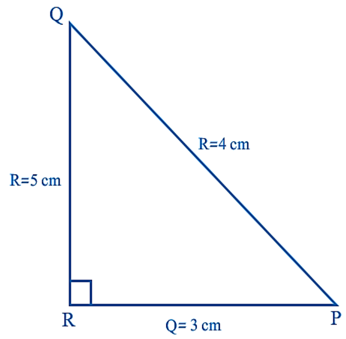
اہم معلومات

عمود = زیر غور زاویے کا متقابلہ ضلع

قاعدہ = زیر غور زاویے کا متصلہ ضلع

وتر = قائمہ زاویے کا متقابلہ ضلع

(vi) $\text{Cosec}(m\angle B) = \dfrac{\text{وتر}}{\text{عمود}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}} = \dfrac{c}{b}$



مثال: قائمہ مثلث PQR میں $\angle P$ اور $\angle Q$ کی تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں جب کہ $\angle R$ قائمہ زاویہ ہے۔

زاویہ P کے لحاظ سے:

(ii) $\text{Sin}\,(m\angle P) = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}} = \frac{m\overline{QR}}{m\overline{PQ}} = \frac{p}{r} = \frac{4}{5}$

(iii) $\text{Cos}\,(m\angle P) = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}} = \frac{m\overline{RP}}{m\overline{PQ}} = \frac{q}{r} = \frac{3}{5}$

(iv) $\tan\,(m\angle P) = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}} = \frac{m\overline{QR}}{m\overline{RP}} = \frac{p}{q} = \frac{4}{3}$

(v) $\text{Cot}\,(m\angle P) = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}} = \frac{m\overline{RP}}{m\overline{QR}} = \frac{q}{r} = \frac{3}{4}$

(vi) $\text{Sec}\,(m\angle P) = \frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}} = \frac{m\overline{PR}}{m\overline{RP}} = \frac{r}{q} = \frac{5}{3}$

(vii) $\text{Cosec}\,(m\angle P) = \frac{\text{وتر}}{\text{عمود}} = \frac{m\overline{RP}}{m\overline{QR}} = \frac{r}{p} = \frac{5}{4}$

زاویہ Q کے لحاظ سے:

(i) $\text{Sin}(m\angle Q) = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}} = \frac{m\overline{RP}}{m\overline{PQ}} = \frac{q}{r} = \frac{3}{5}$

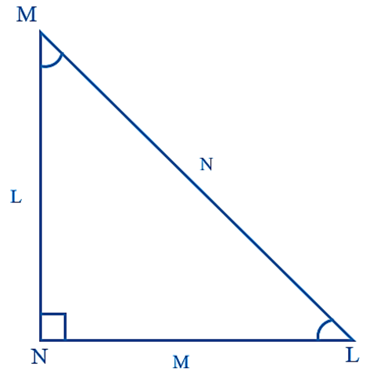
(ii) $\text{Cos}(m\angle Q) = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}} = \frac{m\overline{RQ}}{m\overline{PQ}} = \frac{p}{r} = \frac{4}{5}$

(iii) $\text{Tan}(m\angle Q) = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}} = \frac{m\overline{PR}}{m\overline{QR}} = \frac{q}{p} = \frac{3}{4}$

(iv) $\text{Cot}(m\angle Q) = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}} = \frac{m\overline{QR}}{m\overline{RP}} = \frac{p}{q} = \frac{4}{3}$

(v) $\text{Sec}(m\angle Q) = \frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}} = \frac{m\overline{PQ}}{m\overline{QR}} = \frac{r}{p} = \frac{4}{5}$

$$\text{(vi)} \quad \text{Cosec}(m\angle Q) = \frac{\text{وتر}}{\text{عمود}} = \frac{m\overline{PQ}}{m\overline{RP}} = \frac{r}{q} = \frac{5}{3}$$



اگر ہم تکونیاتی نسبتوں کا جائزہ لیں تو:

$$\text{Sin}(m\angle L) = \frac{1}{\text{Cosec}(m\angle L)}$$

$$\text{Cos}(m\angle L) = \frac{1}{\text{Sec}(m\angle L)}$$

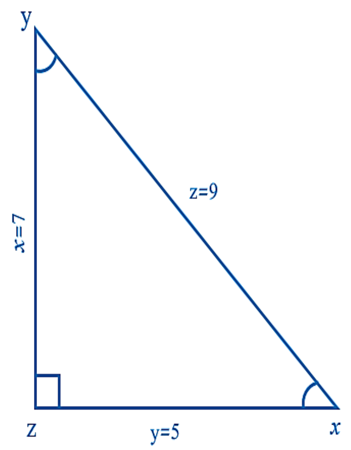
$$\text{Tan}(m\angle L) = \frac{1}{\text{Cot}(m\angle L)}$$

اور

$$\text{Sin}(m\angle L) = \text{Cosec}(m\angle L) = 1$$

$$\text{Cos}(m\angle L) = \text{Sec}(m\angle L) = 1$$

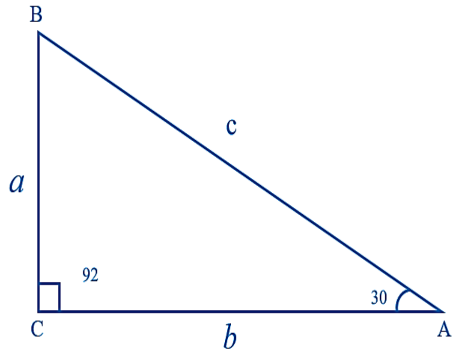
$$\text{Tan}(m\angle L) = \text{Cot}(m\angle L) = 1$$



سرگرمی 1:

قائمتہ الزاویہ مثلث XYZ میں $m\angle X$ اور $m\angle Y$ کی تمام تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں۔

حصّہ دوم: حادہ زاویوں °30، °45 اور °60 کی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کرنا



(i) 30° کے زاویے کی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کرنا:

سامنے دی گئی شکل میں مثلث ABC ایک قائمہ مثلث ہے۔ جس میں $m\angle C = 90°$ اور $m\angle A = 30°$ ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ قائمہ مثلث کا وتر مقدار میں 30° کے متقابلہ ضلع کا دو گُنا ہوتا ہے۔

$$c = 2a$$

مسئلہ اثباتی غورث کے مطابق:

$$(\text{وتر})^2 = (\text{عمود})^2 + (\text{قاعدہ})^2$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 2(a)^2 &= a^2 + b^2 \\ 4a^2 - a^2 &= b^2 \\ 3a^2 &= b^2 \\ b^2 &= 3a^2 \\ b &= \sqrt{3}a \end{aligned}$$

(i) $\text{Sin}30° = \dfrac{\text{عمود}}{\text{وتر}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

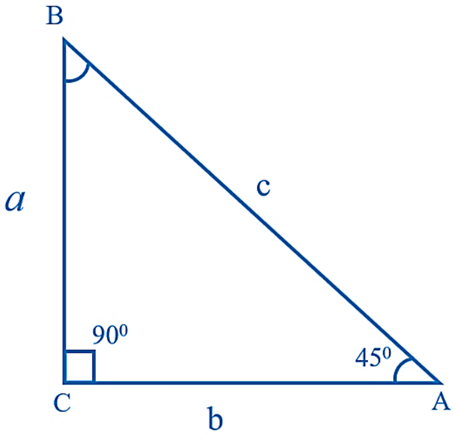
(ii) $\text{Cos}30° = \dfrac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) $\text{Tan}30° = \dfrac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{\sqrt{3}a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(iv) $\text{Cosec}30° = \dfrac{\text{وتر}}{\text{عمود}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2a}{a} = 2$

(v) $\text{Sec}30° = \dfrac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}a} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$$\text{(vi)} \quad \text{Cot}30^\circ = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{BC}} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$



(ii) 45° کے زاویے کی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کرنا:

سامنے دی گئی شکل میں مثلث ABC ایک قائمہ مثلث ہے۔ جس میں $m\angle C = 90^\circ$ اور $m\angle A = 45^\circ$ ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ قائمہ مثلث میں اگر ایک زاویہ 45° کا ہوتا ہے تو دوسرا بھی 45° کا ہو گا۔ لہٰذا مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو ان کے متقابلہ ضلعے بھی متماثل ہوتی ہیں۔ یعنی

$$a = b \quad \text{یا} \quad m\overline{BC} = m\overline{AC}$$

مسئلہ اثباتی فیثا غورث کے مطابق:

$$(\text{وتر})^2 = (\text{عمود})^2 + (\text{قاعدہ})^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = a^2 + a^2$$
$$c^2 = 2a^2$$
$$c = \sqrt{2}a$$

$$\text{(i)} \quad \text{Sin}45^\circ = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}} = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

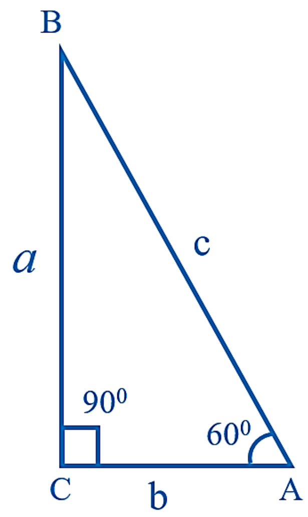
$$\text{(ii)} \quad \text{Cos}45^\circ = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \frac{b}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{(iii)} \quad \text{Tan}45^\circ = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}} = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\text{(iv)} \quad \text{Cosec}45^\circ = \frac{\text{وتر}}{\text{عمود}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$$

$$\text{(v)} \quad \text{Sec}45^\circ = \frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$$

(vi) $\quad \text{Cot}45° = \dfrac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{BC}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{a} = 1$



(iii) 60° کے زاویے کی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کرنا:

سامنے دی گئی شکل میں مثلث ABC ایک قائمہ مثلث ہے۔ جس میں $m\angle C = 90°$ اور $m\angle A = 60°$ ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ قائمہ مثلث کا وتر مقدار میں 60° کے متصلہ ضلع کا دو گُنا ہو گا۔

$$c = 2b$$

مسئلہ فیثا غورث کے مطابق:

$(\text{وتر})^2 = (\text{عمود})^2 + (\text{قاعدہ})^2$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ (2b)^2 &= a^2 + b^2 \\ 4b^2 - b^2 &= a^2 \\ a^2 &= 3b^2 \end{aligned}$$

(i) $\quad \text{Sin}60° = \dfrac{\text{عمود}}{\text{وتر}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\sqrt{3}b}{2b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\quad \text{Cos}60° = \dfrac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{b}{2b} = \dfrac{1}{2}$

(iii) $\quad \tan60° = \dfrac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{3}b}{b} = \sqrt{3}$

(iv) $\quad \text{Cosec}60° = \dfrac{\text{وتر}}{\text{عمود}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2b}{\sqrt{3}b} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(v) $\quad \text{Sec}60^\circ = \dfrac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{2b}{b} = 2$

(vi) $\quad \text{Cot}60^\circ = \dfrac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{BC}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{b}{\sqrt{3}b} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

پس، °30، °45 اور °60 کی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں مندرجہ ذیل ہیں۔

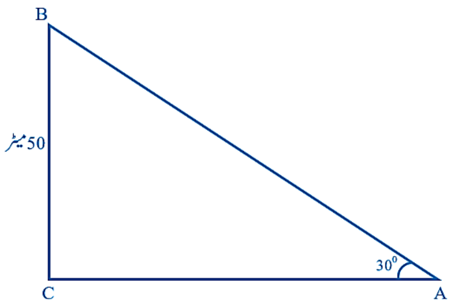
زاویہ	Sinθ	Cosθ	Tanθ	Cotθ	Secθ	Cosecθ
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

حصّہ سوم: تکونیاتی نسبتوں کے استعمال سے روزمرہ زندگی میں بلندیاں اور فاصلے معلوم کرنا

کچھ طلبہ کھیل کے میدان میں بیٹھے ہوئے تھے۔ ان کے سامنے ایک اونچی عمارت تھی اور وہ سوچ رہے تھے کہ اس عمارت کی اونچائی کتنے ہو گی؟ بہت زیادہ سوچنے کے بعد بھی ان کی سمجھ میں نہیں آ رہا تھا۔ آپ کریم نے کہا آؤ چلتے ہیں، ٹیچر سے پوچھتے ہیں۔

جب طالب علموں نے ٹیچر سے دریافت کیا تو انھوں نے کہا یہ بہت ہی آسان ہے۔ تم سب نے مثلث کو حل کرنا تو اچھی طرح سیکھ لیا ہے۔ آؤ اس مسئلے کو حل کرتے ہیں۔ عمارت کو ہم ایک عمودی خط سے ظاہر کرتے ہیں اور پھر اس کے سروں کو B اور C کا نام دے دیں۔ اور بچو تم کہاں بیٹھے ہو؟

فرض کر لو مقام پر، اگر مقام A کو عمارت جس کو مقام C کا نام دیں اور پھر مقام A اور C کو ملا دیں۔ اور آخر میں مقام A اور B کو ملا دیں تو یہ کیا بنا؟



تمام طلبہ نے یک زبان ہو کر کہا کہ یہ تو ایک مثلث بن گئی جو قائمتہ الزاویہ مثلث ہے۔ ٹیچر نے کہا ہم یہ تو آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں کہ ہمارے اور عمارت کے درمیان کتنا فاصلہ ہے جو کہ AC کہلائے گا اور عمارت کی چوٹی اور آپ کے درمیان زاویے کا انداز بھی لگایا جا سکتا ہے۔

فرض $m\angle A = 30°$ اور $mAC = 50m$۔ کیوں کہ عمارت کی بلندی کو ہم $\overline{BC}$ سے ظاہر کر رہے ہیں لہٰذا ہمیں اب BC معلوم کرنا ہے جو کہ اس شکل میں عمود ہے۔

$$\tan\angle A = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{m\overline{BC}}{50}$$

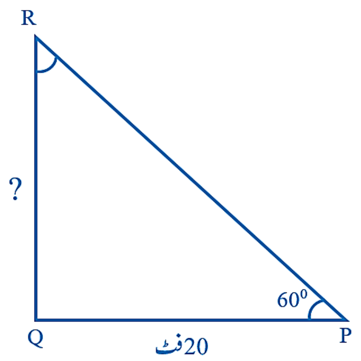
$$m\overline{BC} = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

$$m\overline{BC} = 28.86$$

پس، عمارت کی بلندی 28.86 میٹر ہے۔

مثال1: کمرہ جماعت کی دیوار پر لگی ہوئی گھڑی کا زمین سے فاصلہ معلوم کریں اگر اس دیوار کا متقابلہ دیوار سے فاصلہ 20 فٹ ہو اور متقابلہ دیوار کا پایا کسی مقام سے گھڑی کا زاویہ 60° ہے۔

حل: دیوار سے دیوار تک کا فاصلہ $PQ = 20$ فٹ ہے۔ نقطہ P سے گھڑی کا زاویہ 60° اور زمین سے گھڑی تک کا فاصلہ $\overline{RQ}$ ہے۔



$$\tan\angle P = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\overline{RQ}}{20}$$

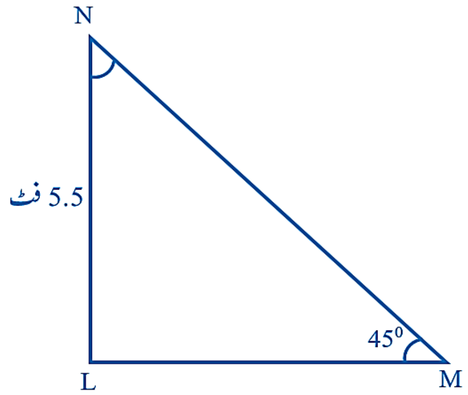
$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\overline{RQ}}{20}$$

$$\overline{RQ} = 20\sqrt{3}$$

$$\overline{RQ} = 34.64$$

لہٰذا، زمین سے گھڑی کا فاصلہ 34.64 فٹ ہے۔

مثال2: رشید دھوپ میں کھڑا ہے۔ رشید کا قد 5.5 فٹ ہے۔ اس کے سائے کی لمبائی معلوم کریں اور سائے سے اُس کا زاویہ 45° بن رہا ہو۔



حل:

$m\overline{NL} =$ 5.5فٹ

$m\angle M = 45°$

$m\overline{LM} = ?$

$\text{Tan}\angle M = \dfrac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$

$$\text{Tan}45° = \frac{5.5}{\overline{LM}}$$

$$1 = \frac{5.5}{\overline{LM}}$$

$m\overline{LM} =$ 5.5فٹ

پس، رشید کا سایہ 5.5 فٹ ہے۔

مشق نمبر 1

سوال 1: ایک بانس کی لمبائی 10 فٹ ہے جو ایک دیوار کے ساتھ اس طرح کھڑا ہے کہ زمین سے 30° کا زاویہ بنا رہا ہے۔ زمین پر بانس اور دیوار کا فاصلہ معلوم کریں۔

سوال 2: درخت کی اونچائی معلوم کریں جب کہ درخت کی چوٹی سے ایک مقام پر 60° کا زاویہ بنا رہا ہے۔ اس مقام اور درخت کا درمیانی فاصلہ 25 میٹر ہے۔

سوال 3: دو کھمبوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں جب کہ ان کی لمبائیاں 15 فٹ اور 16 فٹ ہیں اور کسی مقام سے کھمبوں کی چوٹیاں سے بالترتیب 30° اور 45° کا زاویہ بنا رہے ہیں۔

سوال 4: سہ پَہر کے وقت آدمی اور اس کے سائے کی لمبائیاں برابر ہیں تو اس کے سر اور سائے کے سرے کے درمیان زاویہ معلوم کریں۔

یونٹ 11 معلومات داری

حصّہ اوّل: تعدد اور تعددی تقسیم کی تعریف، تعددی جدول کی تشکیل اور تعددی جدول کے مطابق کالمی نقشے کی تشکیل

ابتدائی مواد میں بعض مشاہدات (عددی قیمتیں) بار بار نظر آتی ہیں۔ عددی قیمتوں کی اس تعداد کو تعدد کہتے ہیں جسے علامت 'f' سے ظاہر کرتے ہیں۔ ابتدائی مواد کو اکثر جماعت یا گروہ میں تقسیم کرنا سودمند ہوتا ہے۔ گروہ میں موجود مواد کی تعداد کو جماعتی تعدد کہتے ہیں اور ان جماعتوں اور ان کے تعدد کو جدول کی شکل میں ظاہر کرنے کو تعددی تقسیم یا تعددی جدول کہتے ہیں۔ تعددی جدول کی تشکیل کے مندرجہ ذیل مراحل ہوتے ہیں۔

مرحلہ 1: پہلے (Range) یعنی سب سے چھوٹی اور سب سے بڑی قیمت معلوم کریں اور پھر دیے گئے اصول کے مطابق جماعتی وقفہ کی جسامت مقرر کریں۔

$$\text{جماعتی وقفہ کی جسامت} = \frac{\text{سب سے بڑی قیمت} - \text{سب سے چھوٹی قیمت}}{\text{جماعتوں کی تعداد}}$$

مرحلہ 2: مساوی جسامت کے جماعتی وقفے لکھیں۔

مرحلہ 3: ذیل میں دیے گئے کالموں پر مشتمل جدول بنائیں۔

(i) جماعتی وقفہ (ii) ٹیلی نشانات (iii) تعدد

جماعتی وقفہ	ٹیلی نشانات	تعدد
0 – 10	III	3

مثال1: انگریزی کے ٹیسٹ میں 60 طلبہ نے 100 مارکس میں مندرجہ ذیل مارکس حاصل کیے ہیں۔ اس مواد کی تعددی جدول بنائیں۔

32, 50, 29, 0, 11, 95, 70, 9, 88, 15, 45, 12, 35, 52, 70, 65, 40, 45, 49, 27,
90, 30, 15, 52, 47, 88, 66, 19, 25, 69, 30, 2, 55, 66, 21, 25, 41, 65, 90, 48,
50, 26, 20, 30, 35, 48, 64, 28, 5, 19, 26, 38, 45, 55, 61, 73, 84, 91, 25, 60

مرحلہ 1: (Range) اور جماعتی وقفہ کی جسامت

سب سے چھوٹی قیمت = 0

سب سے بڑی قیمت = 95

جماعتوں کی تعداد = 10

جماعتی وقفہ کی جسامت= $\frac{95-0}{10} = \frac{95}{10} = 9.5$

= 10 (تقریباً)

مرحلہ 2: 10 جماعتی وقفے دیتے ہوئے 0 – 10، 11 – 20، 21 – 30، 31 – 40، 41 – 50، 51 – 60، 61 – 70، 71 – 80، 81 – 90، 91 – 100

مرحلہ 3: دیے گئے کالموں پر مشتمل جدول بنائیں۔

(i) جماعتی وقفہ (ii) ٹیلی نشانات (iii) تعداد

مرحلہ 4: ٹیلی نشانات کے ذریعے تعدد معلوم کریں۔ عدد کو ٹیلی نشانات میں ظاہر کرنا۔

اعداد کے ٹیلی نشانات

عدد	ٹیلی نشانات	عدد	ٹیلی نشانات	عدد	ٹیلی نشانات
1	I	8	𝍸 III	15	𝍸 𝍸 𝍸
2	II	9	𝍸 IIII	16	𝍸 𝍸 𝍸 I
3	III	10	𝍸 𝍸	17	𝍸 𝍸 𝍸 II
4	IIII	11	𝍸 𝍸 I	18	𝍸 𝍸 𝍸 III
5	𝍸	12	𝍸 𝍸 II	19	𝍸 𝍸 𝍸 IIII
6	𝍸 I	13	𝍸 𝍸 III	20	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
7	𝍸 II	14	𝍸 𝍸 IIII	21	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I

تعددی جدول

تعداد	ٹیلی نشانات	جماعتی	نمبر شمار

	وقفے		
1	0 – 10	||||	4
2	11 – 20	卌 ||	7
3	21 – 31	卌 卌 ||	12
4	31 – 40	卌	5
5	41 – 50	卌 卌	10
6	51 – 60	卌	5
7	61 – 70	卌 ||||	9
8	71 – 80	|	1
9	81 – 90	卌	5
10	91 – 100	||	2

حصّہ دوم: مرکزی رجحان کے پیمانے کی وضاحت کریں اور معلوم کریں جب کہ مواد غیر گروہی ہو

طویل خام مواد کو سمجھنا اور اس کا کوئی نتیجہ اخذ کرنا آسان نہیں ہوتا۔ لہٰذا خام مواد کے طور پر ایک نمائندہ قیمت سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ کم و بیش مرکزی قیمت ہوتی ہے۔ جس کے گرد کم و بیش تمام مواد اکٹھا نظر آتا ہے۔ اس لیے اس کو مرکزی رجحان کا پیمانہ کہتے ہیں۔

مرکزی رجحان کے پیمانے مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) اوسط (ii) وسطانیہ (iii) عادہ

(i) اوسط: سب سے زیادہ جانا پہچانا مرکزی رجحان کا پیمانہ ہے۔ مثلاً کاشف نے ایک امتحان میں مختلف مضامین میں 70، 50، 75، 65، 61، 59 اور 82 نمبر حاصل کیے ہیں تو اس مندرجہ ذیل طریقے سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ یاد رہے کہ یہ غیر گروہی مواد ہے۔

$$\text{اوسط} = \frac{70 + 50 + 75 + 65 + 61 + 59 + 82}{7}$$

$$\text{اوسط} = \frac{462}{7}$$

$$\text{اوسط} = 66$$

لہٰذا اس مواد کی قیمت یعنی اوسط (حسابی اوسط) 66 نمبر ہیں۔

(ii) وسطانیہ: وسطانیہ وہ رقم ہے جو مواد کو دو حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ یعنی مواد کا 50 فی صد وسطانیہ کی قیمت سے زیادہ ہوتا ہے اور 50 فی صد اس سے کم ہوتا ہے۔ پس اس کے لیے ضروری ہے کہ مواد کو ترتیبِ صعودی یا ترتیبِ نزولی میں لکھا جائے۔ جب کہ مواد غیر گروہی ہو۔

اگر رقموں کی تعداد (n) طاق ہو گی تو:

وسطانیہ = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ویں رقم

اگر رقموں کی تعداد (n) جفت ہو گی تو:

وسطانیہ = $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں رقم اور $\left(\frac{n+2}{2}\right)$ ویں رقم

اور ان دونوں رقموں کا اوسط وسطانیہ ہوتا ہے۔

مثال: مندرجہ ذیل اعداد کا وسطانیہ معلوم کرتے ہیں۔

11, 7, 8, 6, 5, 9, 10, 13, 6

حل: اس مثال میں رقموں کی تعداد طاق یعنی 9 ہے۔

وسطانیہ = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ویں رقم

وسطانیہ = $\left(\frac{9+1}{2}\right)$ ویں رقم

وسطانیہ = $\frac{10}{2}$ ویں رقم

وسطانیہ = 5ویں رقم

اب ہم دیے گئے مواد کو جو کہ غیر گروہی ہے، ترتیب صعودی میں لکھیں گے۔ جیسے:

5, 6, 6, 7, **8**, 9, 10, 11, 13

5ویں رقم 8 ہے۔ لہٰذا اس مواد کی نمائندہ قیمت یعنی وسطانیہ 8 ہے۔

آئیں! ایک اور مثال پر غور کریں۔

مثال: مندرجہ ذیل اعداد کا وسطانیہ معلوم کریں۔

55, 65, 60, 62, 70, 66, 58, 71

حل: اس مثال میں رقموں کی تعداد جفت یعنی 8 ہے۔

پہلی رقم = $\left(\frac{8}{2}\right)$ ویں رقم

پہلی رقم = 4ویں رقم

دوسری رقم = $\left(\frac{8+2}{2}\right)$ ویں رقم

دوسری رقم = $\left(\frac{10}{2}\right)$ ویں رقم

دوسری رقم = 5ویں رقم

سب سے پہلے تمام رقموں کو ترتیبِ صعودی میں لکھیں گے۔ جیسے:

55, 58, 60, **62**, **65**, 66, 70, 71

لہٰذا، چوتھی اور پانچویں رقمیں بالترتیب 62، 65 ہیں۔

$$\text{وسطانیہ} = \frac{\text{پہلی رقم} + \text{دوسری رقم}}{2}$$

$$\text{وسطانیہ} = \frac{65+62}{2} = \frac{127}{2} = 63.5$$

لہٰذا، اس مواد کی نمائندہ قیمت یعنی وسطانیہ 63.5 ہے۔

(iii) عادہ: کسی مواد میں وہ رقمیں جو زیادہ سے زیادہ بار آئی ہوں، عادہ کہلاتی ہیں۔ کس مواد میں ایک عادہ یا ایک سے زیادہ عادہ یا کوئی عادہ نہیں ہو سکتا ہے۔

مثال1: ریاضی کے ٹیسٹ میں 15 طلبہ کے مارکس دیے گئے ہیں، آئیں عادہ معلوم کریں۔

72, 70, 25, 65, 85, 65, 49, 69, 70, 35, 80, 51, 65, 55, 60

حل: اس مواد میں 65 دوسرے مارکس کے مقابلے میں زیادہ یعنی 3 بار آیا ہے۔

اس لیے اس غیر گروہی مواد کا نمائندہ عدد یعنی عاد 65 ہے۔

آئیں! ایک اور مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال2: 10, 15, 9, 20, 17, 16, 21, 9

حل: ان اعداد میں کوئی عدد ایک سے زیادہ بار نہیں آیا۔ اس لیے مواد میں کوئی عادہ نہیں ہے۔

آئیں! ایک اور مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال3: 20, 25, 19, 7, 20, 30, 40, 25, 35

حل: اس مثال میں 20 اور 25 ایسی رقوم ہیں جو دو دو بار آئی ہیں۔ لہٰذا اس مواد میں دو عادہ 20 اور 25 ہیں۔

مشق نمبر 1

سوال 1: مندرجہ ذیل مواد کا اوسط، وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

(i) 24, 18, 16, 29, 18, 17, 21, 24

(ii) 75, 68, 87, 84, 49, 98, 69

(iii) 39, 55, 47, 39, 63, 44, 64, 56, 66, 38

(iv) 21, 74, 55, 83, 86, 44, 38, 45, 21

(v) 135, 215, 108, 250, 206, 206, 178, 108

(vi) 10, 4, 6, 5, 5, 7, 11, 12, 3

حصّہ سوئم: اوسط، وسطانیہ اور عادہ سے متعلق حقیقی زندگی کے مسائل حل کرنا

ہماری روزمرہ زندگی میں اوسط کا استعمال عام ہے۔ جیسے آپ نے اکثر لوگوں کو یہ کہتے ہوئے سنا ہو گا کہ اوسطاً فی کس آمدنی، امتحان میں اوسط مارکس، اوسطاً فی اوور رَنز، اوسطاً بارش وغیرہ۔

مثال 1: محکمہ موسمیات کے مطابق ایک ہفتے کے مختلف دِنوں کا درجہ حرارت ذیل میں دیا گیا ہے۔

پیر	منگل	بدھ	جمعرات	جمعہ	ہفتہ	اتوار
39°	35°	40°	41°	40°	38°	42°

اس مواد پر غور کریں اور ان کا اوسط، وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

حل: جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ اوسط معلوم کرنے کے لیے ہم سب سے پہلے مواد کے تمام ارکان کا مجموعہ معلوم کرتے ہیں اور پھر اس مجموعہ کو ارکان کی تعداد سے تقسیم کرتے ہیں۔ لہٰذا

$$\text{اوسط} = \frac{\text{مواد کے تمام ارکان کا مجموعہ}}{\text{ارکان کی تعداد}}$$

$$\text{اوسط} = \frac{42^\circ + 38^\circ + 40^\circ + 41^\circ + 40^\circ + 35^\circ + 39^\circ}{7}$$

$$\text{اوسط} = \frac{275}{7} = 39.28 = 39.3$$

پس، اوسط درجہ حرارت 39.3° ہے۔

آئیے! اب ہم اس مواد کا وسطانیہ معلوم کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ وسطانیہ معلوم کرنے کے لیے سب سے پہلے مواد کو ترتیبِ صعودی یا ترتیبِ نزولی میں لکھتے ہیں۔

$$35^\circ, 38^\circ, 39^\circ, 40^\circ, 40^\circ, 41^\circ, 42^\circ$$

کیوں کہ رقموں کی تعداد طاق ہے۔ لہٰذا

$$\text{وسطانیہ} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ویں رقم}$$

$$\text{وسطانیہ} = \left(\frac{7+1}{2}\right) \text{ویں رقم} = \frac{8}{2} = 4$$

یعنی وسطانیہ 4ویں رقم جو کہ 40° ہے۔

آئیں! اب عادہ معلوم کرتے ہیں۔

اگر اس مواد کو غور سے دیکھیں تو 40° ایسی رقم ہے جو دو بار آئی ہے۔
لہٰذا اس مواد کا عادہ 40° ہے۔

سرگرمی: ایک جماعت میں 25 طلبہ ہیں اور ان کا ریاضی، انگریزی اور سائنس کا ٹیسٹ لیا گیا۔ تینوں ٹیسٹوں کے نتائج درج ذیل ہیں۔ تینوں ٹیسٹوں کا علیحدہ علیحدہ اوسط معلوم کریں اور بتائیں کہ کس مضمون کا اوسط بہتر ہے۔ ہر مضمون 100 مارکس کا ہے۔

ریاضی: 80, 25, 70, 35, 49, 83, 40, 10, 65, 70, 79, 82, 55, 40, 15, 85, 59, 44, 71, 85, 30, 90, 85, 50, 60

انگریزی: 60, 71, 30, 45, 61, 25, 35, 11, 42, 50, 52, 40, 80, 20, 79, 38, 45, 25, 50, 38, 44, 45, 19, 27, 25

سائنس: 56, 58, 74, 24, 15, 30, 47, 50, 36, 48, 39, 55, 33, 64, 55, 61, 65, 78, 41, 57, 29, 49, 56, 63, 68

مشق نمبر 2

سوال 1: شاہد اخبار بیچتا ہے۔ اُس نے ایک ہفتے میں روزانہ کے حساب سے مندرجہ ذیل اخبار بیچے:

55, 65, 70, 60, 56, 51, 50

بتائیں اُس نے اوسطاً فی دِن کتنے اخبار بیچے؟

سوال 2: پاکستانی کرکٹ ٹیم کے کھلاڑیوں نے مندرجہ ذیل رنز بنائے:

99, 35, 40, 15, 26, 50, 100, 0, 10, 16, 35

بتائیں اوسطاً فی کھلاڑی کتنے رنز بنائے؟ نیز وسطانیہ اور عادہ بھی معلوم کریں۔

سوال 3: ایک فیکٹری میں ملازمین کی تنخواہ بالترتیب 35000 روپے، 20000 روپے، 25000 روپے، 10000 روپے، 50000 روپے، 25000 روپے، 40000 روپے، 25000 روپے اور 20000 روپے ہے تو ملازمین کی اوسط آمدنی معلوم کریں۔

سوال 4: زویا نے 300 صفحات کی کتاب کو ایک ہفتے میں مکمل کیا تو بتائیں اُس نے اوسطاً کتنے صفحے ایک دِن میں پڑھے؟

سوال 5: شاہد آفریدی نے 5 رنز فی اوور کی اوسط سے 60 رنز اسکور کیے۔ بتائیں اس نے کُل کتنے اوور کھیلے؟

قومی ترانہ

پاک سَرزمین شاد باد — کِشورِ حَسِین شاد باد
تُو نِشانِ عزمِ عالی شان — ارضِ پاکستان
مرکزِ یقین شاد باد

پاک سَرزمین کا نِظام — قُوّتِ اُخُوّتِ عوام
قوم ، مُلک ، سلطنت — پایندہ تابندہ باد
شاد باد منزلِ مُراد

پَرچمِ ستارہ و ہِلال — رہبرِ ترقّی و کمال
ترجمانِ ماضی، شانِ حال — جانِ اِستقبال
سایۂ خدائے ذُوالجلال